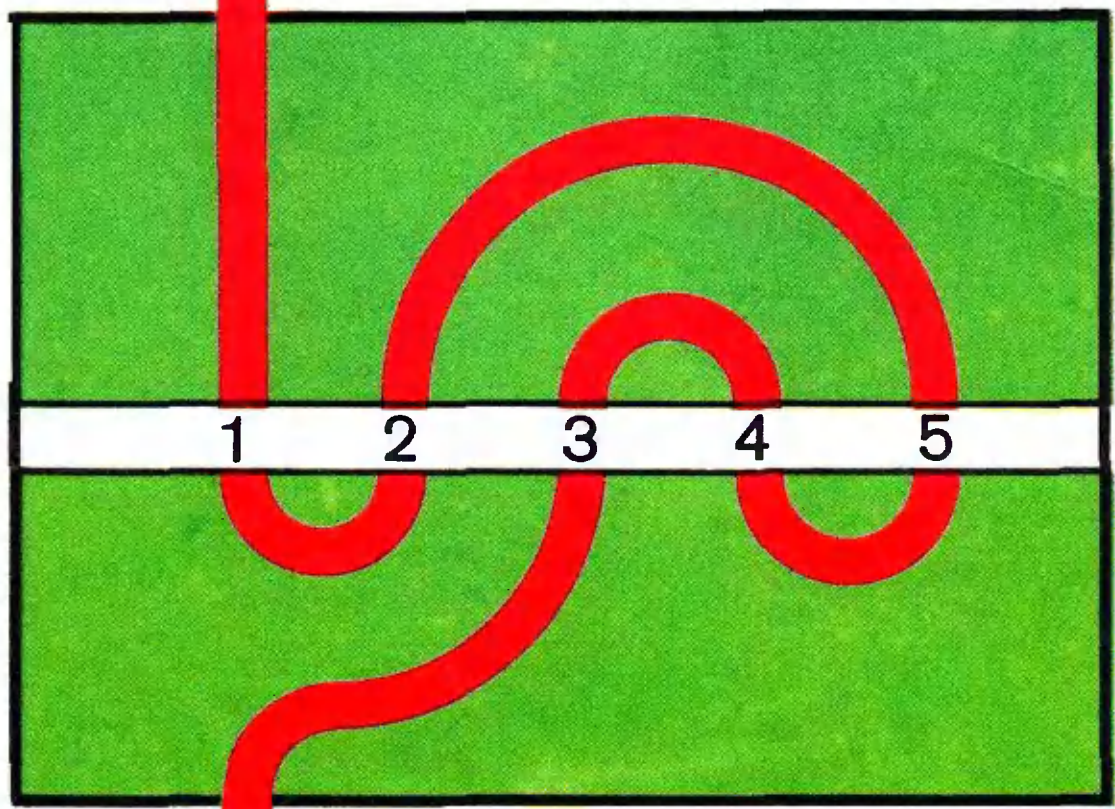


# Квант

ISSN 0130 - 2221

Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 2 3 4 5

3 4 5 2 1

1991



**D**ieu  
 m  
 m  
 tute mea  
 et quesui eam michi as  
 sumere sponsam. Ce  
 sont les parolles que

age dist en  
 sapience  
 pitre. en  
 quoy il dist. Jay aime  
 e sapience et si lay que  
 se ses en ma jeunesse  
 pour de elle faire mon

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал

Учредители —  
Президиум  
Академии наук СССР,  
Президиум  
Академии педагогических  
наук СССР  
и трудовой коллектив  
редакции  
журнала «Квант»



Москва, «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

### В номере:

- 2 **А. Мигдал** Вычисления без вычислений
- 11 **В. Арнольд**. Меандры
- 13 **Ю. Соловьев**. Огюстен Луи Коши и математическая индукция
- 15 **В. Овсиенко**. Анализ и неравенства
- Задачник «Кванта»**
- 18 Задачи M1271 — M1275, Ф1278 — Ф1282
- 19 Решения задач M1246 — M1249, Ф1258 — Ф1262
- 29 ...Итак, задача полностью решена
- «Квант» для младших школьников**
- 31 Задачи
- 32 **Дж. Уокер**. Движение в час пик
- Школа в «Кванте»**
- Физика 9, 10, 11:
- 37 О двух мерах взаимодействия
- 39 О ледниках, скороварках и теореме Карно
- 44 О чем рассказал спектр атома водорода
- 47 Избранные школьные задачи по физике
- 48 Конкурс «Математика 6—8»
- 40 **Калейдоскоп «Кванта»**
- Математический кружок**
- 49 **Р. Алексеев, Л. Курляндчик**. Сумма минимумов и минимум суммы
- Практикум абитуриента**
- 52 **Б. Орач**. Теорема Менелая
- Р — значит ракета**
- 56 **В. Туров**. Бросай вниз, если хочешь взлететь повыше
- 59 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**
- Игры и головоломки**
- 69 **Дж. Конвей**. Числовые фризмы
- 71 **Ответы, указания, решения**
- 79 **Анкета 3 — 91**
- «Квант» улыбается (58)**
- Наша обложка**
- 1 **Излучины рек, узоры извилистых линий на древнегреческих вазах называют меандрами (от древнего названия реки Б. Мендерес в Турции). Пересечения извилистой красной реки с белой дорогой задают перестановки, которые также называются меандрами. О связанных с ними интересных исследовательских задачах рассказывается в статье В. Арнольда.**
- 2 **Монарх (эпохи Ренессанса) демонстрирует двору «часы мудрости» (миниатюра из манускрипта XV века). Физик-теоретик XX века в этом номере журнала (с. 2) рассказывает об осцилляторе, который является моделью любой колебательной системы (и в частности, тех самых древних часов).**
- 3 **Шахматная страничка.**
- 4 **Тренировка пространственного воображения: из трех тел — одно.**

# ВЫЧИСЛЕНИЯ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Академик А. МИГДАЛ

*Если математика — это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика — это искусство вычислять без математики.*

Высказывание, приведенное в качестве эпиграфа, возникло в результате споров физиков и математиков и нуждается в разъяснении. Даже самые простые вычисления в физике не обходятся без математики. Однако на первой, самой важной стадии работы физика-теоретика, когда устанавливается физическая картина явления, математика отступает на задний план и играет только подсобную роль. Но прежде чем говорить о связи физики и математики, следует пояснить, что такое теоретическая физика.

## 1. КАК РАБОТАЮТ ФИЗИКИ?

### Экспериментаторы и теоретики

Существует два типа физиков — экспериментаторы и теоретики, причем эти две профессии почти никогда не совмещаются в одном лице. Физики-экспериментаторы исследуют соотношения между физическими величинами, или, говоря более торжественно, открывают законы природы, пользуясь экспериментальными установками, т. е. производя измерения физических величин с помощью приборов. Для этого надо глубоко понять изучаемые явления (чтобы знать, что и как измерять). Физики-теоретики изучают природу, пользуясь только бумагой и карандашом, т. е. выводя новые соотношения между наблюдаемыми величинами, опираясь на найденные ранее экспериментально и теоретически законы природы. Причина разделения этих двух профес-

сий не только в том, что каждая из них требует своих специальных знаний: знания методов измерения — в одном случае и владения математическим аппаратом — в другом. Главная причина в том, что эти профессии соответствуют различным характерам мышления и различным формам интуиции. Интуиция, т. е. способность подсознательно находить правильный путь, играет важнейшую роль, особенно на первых стадиях работы. К сожалению, дар интуиции возникает не сразу, а в результате упорной работы, как награда за решение многих научных задач.

Поскольку теоретическая физика имеет дело с более отвлеченными понятиями, чем физика экспериментальная, физику-теоретику требуется более абстрактная форма интуиции, близкая иногда к интуиции математика. В прошлом веке, когда физика еще не была так специализирована, многие физики совмещали обе профессии. Так, Максвелл, который получил теоретически уравнения, описывающие все электромагнитные явления, занимался и экспериментами. Герц, который обнаружил экспериментально электромагнитные волны, был одновременно и хорошим теоретиком. И все-таки в каждом случае можно указать, какая из профессий главная: для Максвелла это — теоретическая физика, а для Герца — физика экспериментальная.

В XX веке одним из самых замечательных примеров «универсального» физика — и теоретика, и экспериментатора — был Энрико Ферми. На-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 8 за 1979 год.

ряду со многими другими работами Ферми создал теорию радиоактивного распада и вместе с физиками своей группы открыл экспериментально искусственную радиоактивность элементов, возникающую при бомбардировке нейтронами.

Еще одним примером выдающегося теоретика, тесно связанного с экспериментом, был академик Г. И. Будкер, у которого теоретическая физика совмещалась с замечательными инженерными идеями. Он руководил теоретической разработкой и практическим осуществлением ускорителя на встречных пучках заряженных частиц в новосибирском Академгородке.

Однако это — редкие исключения, и молодой человек, интересующийся физикой, должен решить для себя, какую из двух профессий он выбирает.

В дальнейшем речь пойдет о работе физиков-теоретиков.

### Физика и математика

Итак, задача физика-теоретика — получить соотношения между наблюдаемыми величинами с помощью математических выкладок. Не означает ли это, что теоретическая физика представляет собой нечто вроде прикладной математики? Такая точка зрения совершенно неверна. И по характеру задач, и по методам подхода к задачам математика и теоретическая физика категорически отличаются.

В математике важнейшую роль играют математическая строгость, т. е. логическая безупречность всех выводов, вытекающих из принятых аксиом, и исследование всех логически возможных соотношений. Задача физики — воссоздать по возможности точную картину мира без строгих «правил игры», опираясь на все известные экспериментальные и теоретические факты, используя основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте. Так, математик исследует все логически возможные типы геометрических фигур, физик же выясняет, какие гео-



А. Б. Мигдал (1911—1991)

*В этом месяце академику Аркадию Бейнусовичу Мигдалу исполнилось бы 80 лет. Он не дождал до своего юбилея всего лишь месяц. А. Б. Мигдал принадлежал к знаменитой школе Ландау. Он пришел к Ландау в 1939 году, когда тому было 30 лет, а самому Мигдалу — 28 лет, так что Мигдал был скорее сотрудником и другом, чем учеником Ландау.*

*Уже с тех пор имя Мигдала было окружено легендами и мистификациями. Вот одна из легенд. Когда Ландау спросили, кто его любимый ученик, он будто бы ответил: «Пожарчук. Хотя есть еще Мигдал... Но он ведь ленился!» И в этих словах было не осуждение, нет — скорее удивление.*

*На вопрос, что сейчас делает Мигдал, можно было услышать — работает с учениками над новой книгой. Или — пишет статью о психологии творчества. А можно — руководит подводной экспедицией на Дальнем Востоке. Или — в альплагере на восхождении. Или — работает над скульптурным портретом Эйнштейна. А еще Мигдал делал прекрасные ювелирные украшения. И выступал по телевидению. И... И все Мигдал делал прекрасно, ко всему относился не дилетантски, а профессионально. Но как же ему еще хватало времени на физику? Ведь академиком «за так» не делают! Дело в том, что при всех увлечениях главной, постоянной любовью Мигдала всегда оставалась физика. Мигдал работал со страстью, у него всегда было много учеников, с которыми он возился, не жалел сил.*

*Все, кто знал Аркадия Бейнусовича Мигдала, всегда с благодарностью вспоминают не только совместную работу, но и человеческое общение, пронизанное теплотой, юмором и интеллигентностью.*

метрические соотношения осуществляются в нашем мире.

Математик, даже если он занимается прикладными задачами, т. е. задачами, пришедшими не из математики, берется за решение только тех задач, которые не требуют дополнительных недоказанных предположений. Физик же, как правило, имеет дело с задачами, в которых имеющихся исходных данных недостаточно для решения, и искусство состоит в том, чтобы угадать, какие недостающие соотношения реализуются в природе. Именно для этих догадок требуется не математическая, а физическая интуиция.

Убедительность в физике достигается получением одного и того же результата из разных исходных предпосылок. При этом приходится вводить лишние, логически не необходимые аксиомы, каждая из которых сама по себе не абсолютно достоверна. Единственное условие состоит в том, чтобы уметь оценивать степень убедительности того или иного предположения и ясно понимать, какие предположения требуют дальнейшей проверки.

Если какая-либо область физики достигнет такого развития, что все ее результаты можно будет вывести из нескольких строго установленных экспериментально аксиом, то эта область перестанет быть частью развивающейся физической науки и перейдет в раздел прикладной математики или техники. Так произошло с классической механикой.

Разумеется, очень полезно анализировать структуру физической теории, т. е. выяснять, из каких исходных предпосылок получаются те или иные результаты. Однако центр тяжести в таком аксиоматическом подходе — не в общности и математической строгости выводов, а в правильной выборке исходных предположений и в оценке того, какие из них наиболее достоверно подтверждены опытом.

А для этого требуется интуиция физика. В тех случаях, когда эту работу проделывает математик, он обязательно, хотя бы на время, де-

лается физиком-теоретиком. Иначе он рискует оказаться, по выражению польского сатирика Леца, в положении эскимоса, который вырабатывает для жителей Конго правила поведения во время жары.

Итак, математика и физика — науки с разными задачами и с разными методами подхода к задачам.

В математике достоверность результатов достигается логической строгостью и анализом всех логически возможных решений. В физике рассматриваются только те решения, которые могут осуществляться в природе, и достоверность достигается многократной проверкой сделанных предположений. Математическая строгость в физике представляет собой невозможную и ненужную роскошь. Добиваться в физике математической строгости так же не нужно, как требовать от бригадиров лесоповала, чтобы они на работе разговаривали стихами. Но вместе с тем физик-теоретик должен свободно владеть математическим аппаратом, т. е. знать и уметь использовать все те математические методы, которые могут оказаться полезными при решении физических задач.

## II. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Попробуем показать на простых примерах, как работают физики-теоретики на первой, самой важной стадии работы, когда делается качественный анализ поставленной задачи. Как мы увидим, на этой стадии почти без всяких вычислений получаются грубые соотношения между входящими в задачу величинами. Следующая стадия работы — получение точных количественных соотношений с помощью математического аппарата теории — целиком опирается на первую стадию, во время которой проясняется физическая картина явления и возникает проект ожидаемого решения. Не имея такого предположительного проекта, нельзя приступать к поискам точного решения. Действительно, доказать удается только те утверждения, которые были заранее угаданы. Из это-

го правила почти не бывает исключений.

Одним из главных элементов качественного анализа является решение задачи на упрощенных моделях, в которых отброшено все несущественное. Усложнять решенную задачу несравненно проще, чем заново решать сложную.

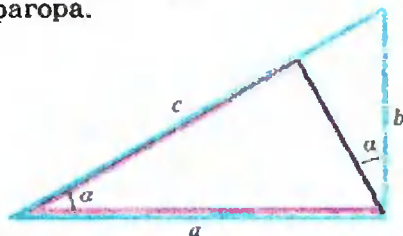
В некоторых простых случаях многое проясняет простой размерный анализ входящих в задачу величин и возможных соотношений между ними.

### Размерные оценки

Для иллюстрации докажем теорему Пифагора, пользуясь соображениями размерности. Из размерности следует, что площадь  $S$  прямоугольного треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы на некоторую функцию одного из острых углов:  $S = c^2 f(\alpha)$ . Аналогичным образом можно представить площади двух подобных прямоугольных треугольников, которые получаются, если опустить высоту из прямого угла. Для этих треугольников роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha).$$

Сократив на  $f(\alpha)$ , получим теорему Пифагора.



$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2}, & S_{\triangle} &= c^2 f(\alpha), \\ S_{\triangle} &= a^2 f(\alpha), & S_{\triangle} &= b^2 f(\alpha) \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний грузика на пружине. Прежде всего выясним, какие величины могут входить в выражение для периода. Поскольку силы, действующие на грузик, — это сила тяжести

и сила упругости, естественно предположить, что период колебаний зависит от ускорения свободного падения  $g$  и массы  $m$  грузика и от жесткости пружины  $k$ . Разумеется, такие величины, как температура и вязкость воздуха, не войдут в задачу, если мы пренебрегаем затуханием колебаний. (Чтобы упростить задачу, надо знать, чем можно пренебречь!) Из величин  $g$ ,  $m$  и  $k$  можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность времени, —  $\sqrt{m/k}$ . Следовательно, период  $T$  равен

$$T = C \sqrt{m/k}.$$

Ускорение  $g$  не вошло в ответ. Безразмерная константа  $C$  не может быть найдена из размерных соображений; можно только сказать, что она не очень велика и не очень мала, — она порядка единицы. Действительно, значение  $C$  должно быть найдено из решения ненаписанного нами уравнения движения грузика. А безразмерные коэффициенты, возникающие из решений уравнений, встречающихся в физике, как правило, оказываются порядка единицы\*). Точное вычисление дает для  $C$  значение  $2\pi$ .

Таким образом, мы без вычислений, пользуясь только размерным анализом, нашли примерную величину периода колебаний грузика на пружине.

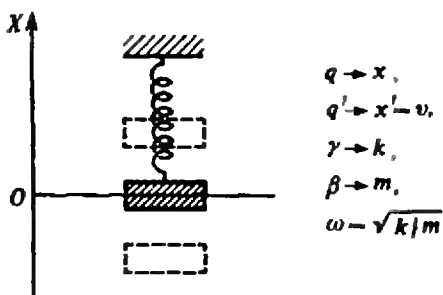
### Пример обобщения — осциллятор

Во всех областях физики встречаются задачи, связанные с колебаниями систем около положения равновесия. Для понимания многих явлений, а следовательно, для качественного анализа этих явлений нужно знать общие свойства таких систем. Системы, совершающие колебания около положения равновесия, независимо от их устройства называют осцилляторами. Простейшие примеры осцилляторов — грузик на пружине, математический маятник. Более сложный пример — натянутая струна; у нее может быть много типов колебаний: коле-

\*) Это утверждение нельзя доказать в общем виде, но оно практически всегда справедливо, и этот факт широко используются при всех оценках.

бания с пучностью посередине (основной тон), с одним узлом, двумя узлами и т. д. (обертоны). Таким образом, струна — это набор осцилляторов разных частот. Аналогичный пример — столб воздуха в органной трубе; его можно заставить колебаться с наименьшей частотой (основной тон) или с более высокой частотой, когда в некоторых точках воздушного столба частицы воздуха будут неподвижны (аналог узлов в колебаниях струны).

Общее свойство всех осцилляторов состоит в следующем: независимо от конкретного устройства осциллирую-



щей (т. е. колеблющейся около положения равновесия) системы, энергия системы в любой момент времени может быть записана в виде

$$E = \gamma q^2 / 2 + \beta q'^2 / 2, \quad (*)$$

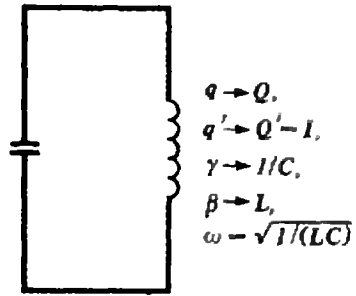
где  $q$  — величина, характеризующая отклонение от положения равновесия, а  $q'$  — скорость изменения величины  $q$  во времени (т. е.  $q' = \Delta q / \Delta t$ , где  $\Delta t$  — малый промежуток времени). Слагаемое  $\Pi = \gamma q^2 / 2$  — это потенциальная энергия осциллятора; коэффициент  $\gamma$  называют жесткостью осциллятора. Слагаемое  $K = \beta q'^2 / 2$  — это кинетическая энергия осциллятора; коэффициент  $\beta$  называют массой осциллятора. (Вспомните, как записывается энергия простейшего осциллятора — грузика на пружине, — и вам станет понятно, почему  $\gamma$  называют жесткостью, а  $\beta$  — массой осциллятора.)

Как бы ни был конкретно устроен осциллятор, его угловая частота колебаний  $\omega = 2\pi / T$  выражается следующим образом через жесткость  $\gamma$  и массу  $\beta$ :

$$\omega = \sqrt{\gamma / \beta}.$$

Введение «обобщенного» осциллятора, координата которого — не обязательно расстояние от положения равновесия, а может иметь любой смысл, лишь бы энергия имела такую же структуру, как  $E$  в выражении (\*), позволяет делать выводы о поведении колеблющейся системы без рассмотрения физической природы происходящих в ней процессов.

Для пояснения приведем еще один пример осциллятора, не похожий на все приведенные выше примеры. Допустим, имеется катушка индуктивности  $L$  из хорошо проводящей проволоки, концы которой присоединяют к конденсатору емкости  $C$ , имеющему заряд  $Q_0$ . В цепи возникают электромагнитные колебания. Если катушка сделана из сверхпроводника (для этого нужна низкая температура), колебания практически не будут затухать.



Энергия такой системы состоит из двух слагаемых: энергии магнитного поля в катушке и энергии электрического поля в конденсаторе. Энергия электрического поля конденсатора пропорциональна квадрату заряда  $Q$ , который в данный момент находится на обкладке конденсатора:  $\Pi = \frac{1}{C} Q^2 / 2$ . Энергия магнитного поля катушки пропорциональна квадрату силы тока  $I$ , текущего в данный момент по катушке:  $K = LI^2 / 2$ . Но сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора со временем:  $I = Q'$ . Таким образом, энергия магнитного поля катушки  $K = LQ'^2 / 2$ .

Следовательно, энергия системы в любой момент времени равна

$$E = \frac{1}{C} Q^2 / 2 + LQ'^2 / 2.$$



Наша система — осциллятор; роль координаты осциллятора играет заряд  $Q$ , потенциальная энергия осциллятора — энергия конденсатора, кинетическая — энергия магнитного поля катушки. Из записи энергии видно, что жесткость этого осциллятора — величина  $1/C$ , а роль массы играет индуктивность  $L$ . Сразу можем записать частоту колебаний:  $\omega = \sqrt{1/LC}$ .

Такой осциллятор называется электрическим колебательным контуром.

### Как угадать решение?

Приведем пример того, как проясняются некоторые черты решения, прежде чем будет построен аппарат для точного решения задачи, до того как найдены уравнения, на основе которых задача будет решаться. Это заодно и пример более сложного анализа размерностей, чем в случае осциллятора.

Одна из труднейших и неразрешенных задач теоретической физики — связь гравитационных и электромагнитных явлений.

Если такая связь существует, то в результате решения каких-то еще не найденных уравнений будет получено безразмерное число<sup>\*</sup>), дающее соотношение между гравитационной постоянной  $\gamma$  и величинами, характеризующими электромагнитные явления, такими, как скорость света  $c$ , заряд электрона  $e$  и его масса  $m$ . Если существенны квантовые явления, то в задачу может войти еще постоянная Планка  $h$ . Зная размерности величин  $\gamma$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $m$ ,  $h$ , нетрудно убедиться, что из этих величин можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\alpha = e^2/\hbar c; \quad \xi = \hbar c/\gamma m^2$$

(напомним, что  $\hbar = h/2\pi$ ).

Первая из этих комбинаций характеризует взаимодействие электрона с электромагнитным полем (безраз-

<sup>\*</sup>) Для того чтобы соотношение между различными физическими величинами не зависело от выбора единиц, оно должно быть записано в виде безразмерной комбинации.

мерный «заряд» электрона) и называется постоянной тонкой структуры. Подстановка численных значений дает  $\alpha = 1/137$ ,  $\xi = 5 \cdot 10^{44}$ . Может ли такое большое число как  $\xi$  возникнуть в результате решения каких-либо разумных уравнений? Безразмерные числа, возникающие в результате решения физических задач, как мы уже говорили, имеют порядок нескольких единиц или долей единицы. Поэтому мы вправе ожидать, что величина  $\xi$  войдет в задачу в такой форме, чтобы в результате получилось число порядка 1. Пока мы применяли здравый смысл. Теперь должен быть сделан небольшой интуитивный логический скачок. Правдоподобно, что в теорию войдет комбинация

$$\alpha \ln \xi \sim 1.$$

Ясно, что знание такого соотношения облегчает поиски решения. Именно в такой форме входит величина  $\xi$  в существующие сейчас теоретические попытки решения задачи о связи электродинамики с гравитацией.

### III. ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРОЩЕНИЕ

**Основная идея квантовой механики**  
Попробуем показать на другом примере, как, предельно упрощая задачу, можно определить главные черты явления. Этот пример пояснит, что такое качественный подход к задаче.

Согласно квантовой механике, энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения.

Возможные значения энергий электрона в атоме водорода даются выражением<sup>\*</sup>)

$$E_n = - \frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^2}. \quad (**)$$

Разности значений  $E_n$  для двух разных  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) определяют с большой точностью частоты наблюдаемых на опыте спектральных линий.

Основная идея квантовой механики состоит в том, что каждая частица (в данном случае — электрон) характеризуется неким волновым процес-

<sup>\*</sup>) Физики, как правило, не пользуются системой СИ. (Примечание автора.)

сом с длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv},$$

где  $m$  — масса частицы,  $v$  — ее скорость. Дискретные значения энергии электрона получаются из того условия, что на длине орбиты, по которой движется электрон, должно укладываться целое число волн. Если радиус орбиты  $r$ , то  $n$ -ному состоянию электрона соответствует условие  $2\pi r = \lambda n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), или  $mv_n = \hbar n/r$ . Отсюда нетрудно найти кинетическую энергию в  $n$ -ном состоянии:

$$W_n = mv_n^2/2 = \hbar^2 n^2 / 2mr^2.$$

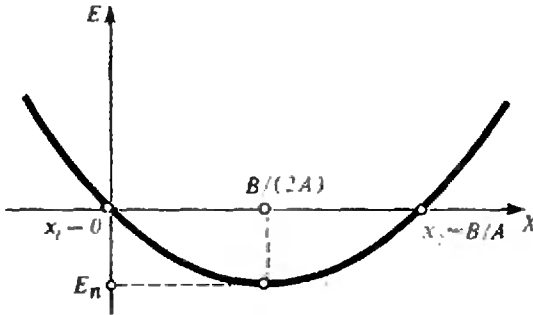
Полная энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра, которая отрицательна и равна  $U = -Ze^2/r$ . Полная энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n(r) = \hbar^2 n^2 / 2mr^2 - e^2/r.$$

В нашем выводе мы предполагаем, что радиус орбиты  $r$  имеет фиксированное значение. Согласно квантовой механике, радиусы орбит «разбросаны» в окрестности классически устойчивой орбиты. В качестве оценки радиуса можно взять значение  $r$ , которое соответствует минимуму энергии  $E(r)$ .

Чтобы найти минимум  $E(r)$ , поступим следующим образом. Перепишем выражение для  $E(r)$  в таком виде:

$$E = Ax^2 - Bx.$$



Мы ввели такие обозначения:  $x = 1/r$ ,  $A = \hbar^2 n^2 / 2m$ ,  $B = e^2$ . Видно, что при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = B/A$  значение  $E$  равно нулю. Внутри интервала  $[x_1, x_2]$   $E$  отрицательно. Где-то внутри этого интервала лежит минимум  $E$ . Будем для оценки считать, что  $E_{\min}$  соответствует

значение  $x$  в середине интервала, т. е.  $x = B/2A$ . Соответственно,  $r = 1/x = 2A/B$ , т. е.

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}.$$

(Отметим, что при  $n=1$  это выражение дает верную оценку для радиуса атома в наимизшем состоянии.) Подставив это значение  $r_n$  в выражение для  $E_n(r)$ , получим

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^2},$$

т. е. выражение, совпадающее с (\*\*)!

В действительности электрон может с разной вероятностью находиться на любом расстоянии от ядра. Наше упрощение состояло в предположении, что это расстояние определенное, равное  $r$ , и находится из условия минимальности энергии. Разумеется, мы действовали грубо. Поэтому нельзя доверять числовому множителю впереди этой формулы, хотя он случайно получился правильным. Но всему остальному можно доверять! И множителю  $me^4/\hbar^2$ , и, что особенно важно, зависимости от «квантового числа»  $n$ .

Точное решение потребовало бы знания основного уравнения квантовой механики (уравнение Шредингера) и очень сложной (по школьным понятиям) математики. То, что мы получили, и есть качественное решение, когда результат получается с точностью до неизвестного числового множителя, но характер зависимости от параметров задачи передается точно. Качественное решение чрезвычайно облегчает получение точного решения, поскольку выясняются главные черты явления. Более того, если есть качественное решение, а точного не удастся получить аналитически, можно без особых потерь в понимании задачи найти его с помощью вычислительных машин.

### Еще одно обобщение — квантовые осцилляторы

Не сложнее решается задача о квантовании осциллятора. При этом нам не существенно, как реализован ос-

циллятор — представляет ли он груз, колеблющийся на пружине, или электрический колебательный контур.

Обозначим через  $q$  обобщенную координату осциллятора. Запишем энергию осциллятора:

$$E = \gamma q^2/2 + \beta q'^2/2.$$

Можно себе представить, что осциллятор — это некая «частица» с массой  $\beta$ , колеблющаяся на пружине с жесткостью  $\gamma$ . Для того чтобы сформулировать для этого объекта основную идею квантовой механики, введем длину волны  $\lambda$  волнового процесса, связанного с нашей «частицей»:

$$\lambda = 2\pi\hbar/\beta q'.$$

В знаменателе стоит произведение «массы» на ее скорость. Так как скорость изменяется при движении частицы, то и длина волны тоже меняется — она минимальна вблизи положения равновесия и растет в тех областях, где скорость «частицы» мала.

Пусть «частица» движется в области от  $-q_0$  до  $q_0$ . (Подчеркнем, что  $2q_0$  — не размах колебаний осциллятора, а та область, в которой «дрожит» его координата.) Для того чтобы образовалась стоячая волна, на «длине»  $2q_0$  должно укладываться целое число полуволи:  $2q_0 = (n+1)\lambda/2$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). В качестве оценки скорости возьмем значение скорости при  $q = q_0$ , т. е.  $(q')_n = 2\pi\hbar/\beta\lambda = \pi\hbar(n+1)/2\beta q_0$ . Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии, находим

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\beta} \frac{(n+1)^2}{q_0^2}.$$

Для полной энергии получаем

$$E_n(q_0) = \frac{(\pi\hbar)^2}{8\beta} \frac{(n+1)^2}{q_0^2} + \frac{\gamma q_0^2}{2}.$$

При малых значениях  $q_0$  энергия велика из-за первого слагаемого, а при больших  $q_0$  — из-за второго. Примерное значение  $q_0$ , дающее наименьшую энергию, получится, если приравнять оба слагаемых. Из этого условия находим

$$q_0^2 = \frac{\pi\hbar(n+1)}{2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Подставляя в выражение для энергии, получаем

$$E_n = \frac{\pi}{2} \hbar \sqrt{\gamma/\beta} (n+1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \hbar \omega (n+1) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Величина  $\omega = \sqrt{\gamma/\beta}$  представляет собой частоту колебаний классического осциллятора.

При точном расчете для энергии получается выражение

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}).$$

Таким образом, мы ошиблись в числовом множителе ( $\pi/2$  вместо 1), а также в численном значении энергии в самом низшем состоянии, т. е.

при  $n=0$  ( $\frac{\pi}{2} \hbar\omega$  вместо  $\frac{1}{2} \hbar\omega$ ). Но все остальное получилось точно! Теперь, когда результат получен, следует задуматься над тем, что мы использовали для его получения и что вытекает из полученных нами выражений для энергии осциллятора и для величины  $q_0^2$ .

Прежде всего, мы применили к нашему осциллятору, не интересуясь тем, как он устроен, принципы квантовой механики, установленные первоначально применительно к электронам. Конечно, естественно ожидать, что общие принципы должны быть такими же и для других частиц, массы которых отличаются от массы электрона. Действительно, такое обобщение с большой точностью подтвердилось опытом. Но почему эти же принципы можно применять и к такому объекту, как колебательный контур, где роль «координаты» играет заряд на обкладках конденсатора? Здесь мы подошли к важному предположению, которое широко использовалось и используется в теоретической физике XX века. Если две системы имеют энергию, одинаково зависящую от координат и скоростей, то такие системы обладают одинаковыми свойствами, несмотря на то, что «координаты» и «скорости» могут иметь совершенно разный смысл в этих системах.

Не было ни одного примера, где бы это предположение противоречило

опыту. Поэтому мы вправе считать, что решили задачу о применении квантовой механики сразу для всех возможных осцилляторов.

Теперь подумаем, что означают полученные нами результаты. Как они переходят в формулы классической механики? Прежде всего, мы получили, что энергия изменяется не непрерывно, а порциями величины  $\hbar\omega$ . Правда, величина  $\hbar$  очень мала, и для обычных макроскопических осцилляторов эта скачкообразность изменения энергии практически не наблюдается. Впрочем, есть такие особые макроскопические системы, где скачкообразность играет определяющую роль (например, лазеры). Правильность полученного нами выражения для энергии осциллятора проверена с большой точностью для многих видов осцилляторов.

Есть еще одно важное свойство квантового осциллятора, которое тоже нами получено. Когда энергия минимальна, классический осциллятор находится в покое в положении равновесия; между тем квантовый осциллятор в наименьшем энергетическом состоянии совершает колебания (их называют «нулевые колебания»). Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка  $\hbar\omega$ . При этом среднее значение координаты осциллятора равно нулю, а среднее значение квадрата координаты дается приведенной выше формулой для  $q_0^2$ . Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и играет важную роль в современной физике.

Если рассмотреть звуковые колебания в твердом теле как набор квантовых осцилляторов, то мы получим, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны, а совершают нулевые колебания. И этот факт был подтвержден опытами по рассеянию света при низких температурах! Если мы будем рассматривать электромагнитные волны, которые могут распространяться в пустом пространстве, как набор осцилляторов, то мы придем к заключению, что в пустоте, даже ког-

да в ней нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля. И эти колебания также были обнаружены на опыте! Но это уже более сложный вопрос, который требует подробного обсуждения.

### Понимание возникает в процессе работы

Мы ввели без объяснения несколько непонятных слов: квантование, волновой процесс, связанный с частицей, квантовый осциллятор и т. д. И начали действовать, не очень их понимая. Тем не менее мы нашли, как зависит энергия атома водорода от квантового числа  $n$ ; узнали, что квантовый осциллятор в наименьшем энергетическом состоянии колеблется, и даже стали применять результаты квантования осциллятора к такому объекту, как колебания электромагнитного поля в пустоте. И в результате этих действий возникло хотя бы частичное понимание.

Итак, понимание возникает в процессе работы. Ведь если бы мы попытались добиться полного понимания до того, как начали наши простые вычисления, ничего бы не получилось. Понимание возникает не скачком, а по мере продвижения в работе. И наоборот, работа продвигается по мере углубления понимания.

Для того чтобы дистичь более глубокого понимания, надо самому решать задачи в данной области физики. Пассивное изучение дает только слабое представление о тех красотах, которые открываются при самостоятельной работе.

По традиции на первых заседаниях научного семинара В. И. Арнольда для студентов Московского университета его участникам предлагается несколько новых задач — точнее, тем для исследования. Среди них иногда встречаются чрезвычайно красивые задачи, формулировки которых понятны даже школьнику. Вот одна из этих тем.

## МЕАНДРЫ

Академик В. АРНОЛЬД

Шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада также на восток. Занумеруем мосты в порядке их следования вдоль шоссе (с запада на восток). Проплывая под мостами вниз по реке, мы будем встречать их, вообще говоря, в другом порядке. Так, например, река на рисунке 1 проходит мосты в порядке 3, 4, 5, 2, 1. Таким образом, эта река определяет перестановку чисел от 1 до 5: (3 4 5 2 1). Ясно, что другая река могла бы протекать иначе и задавать другую перестановку. Но далеко не любая перестановка чисел (мостов) может быть реализована таким образом. (Попробуйте, например, придумать реку, проходящую мосты в порядке 2, 1, 3, 4, 5.) Мы будем называть перестановку *меандром*, если ее можно задать с помощью подходящей реки.

Основной вопрос для нас будет такой: сколько существует различных меандров (т. е. сколько перестановок номеров реализуется), если общее число мостов равно  $n$ ? Обозначим число различных меандров с  $n$  мостами через  $a(n)$ . Легко видеть, что  $a(1) = a(2) = 1$ ,  $a(3) = 2$ ,  $a(4) = 3$  (рис. 2).

**Задача 1.** Найдите следующие члены последовательности  $a(n)$ .

Ответ: 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, 262, 538, 1828, 3926, 13820, ...

Общая формула для  $a(n)$  неизвестна. Неизвестны даже асимптотики  $a(n)$  и  $a(n+1)/a(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 2.** Докажите, что река впервые пересекает шоссе под мостом, номер которого нечетен.

**Задача 3.** Докажите, что номера 1-го, 3-го, 5-го... мостов (вдоль реки) нечетны, если нумеровать мосты вдоль шоссе, а номера 2-го, 4-го... мостов — четны.

Начнем классифицировать меандры с того, что зафиксируем первый вдоль реки мост. Обозначим через  $a_i(n)$  число меандров с  $n$  мостами, для которых река впервые пересекает шоссе под  $i$ -м (вдоль шоссе) мостом. Согласно задаче 2,



Рис. 1.

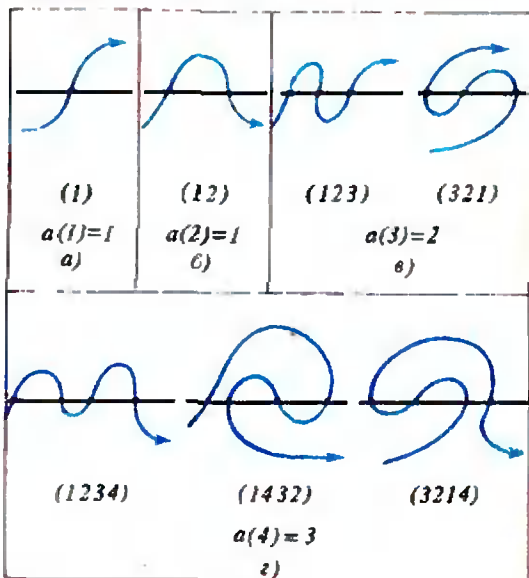


Рис. 2.

$$a(n) = a_1(n) + a_3(n) + \dots + a_{2k-1}(n),$$

где  $n = 2k - 1$  или  $n = 2k$ .

**Задача 4.** Составьте таблицу меандрических чисел  $a_i(n)$  при небольших  $n$ .

Ответ: для  $i, n \leq 10$  см. таблицу.

$a_i(n) \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	1	1	2	3	8	14	42	81	262	538
$a_1(n)$	1	1	1	2	3	8	14	42	81	262
$a_3(n)$			1	1	2	8	7	14	36	81
$a_5(n)$					3	3	7	11	28	57
$a_7(n)$							14	14	36	57
$a_9(n)$									81	81
$a_{11}(n)$										
$a_{13}(n)$										

**Задача 5.** Найдите в этой таблице закономерности. Случайно ли число 14 появилось пять раз?

**Задача 6.** Докажите, что

- $a(n) = a_1(n+1)$ ,
- $a_i(n) = a_j(n)$ , если  $i+j = n+1$  четно,
- $a_i(n) = a_j(n)$ , если  $i+j = n+2$  четно,  $i \geq 3, j \geq 3$ .
- $a_1(2k-1) = a_3(2k)$ , 5)  $a(2k+1)$  четно.

**Задача 7.** Четно ли  $a(16)$ ?

**Задача 8.** Докажите, что  $a(n)$  нечетны только, если  $n = 2^k$ .

**Задача 9.** Исследуйте поведение при  $k \rightarrow \infty$  распределений  $a_i(2k+1)$ , где  $i \geq 1$  и  $a_i(2k)$ , где  $i \geq 3$ .

**Задача 10.** Докажите, что всякая перестановка  $n$  мостов может быть реализована меандрирующей рекой, если шоссе и река находятся не на плоскости, а на подходящей поверхности, скажем на плоскости с приклеенными к ней ручками (рис. 3).



Рис. 3.



Рис. 4.

Минимальное число ручек такой поверхности назовем родом перестановки. Таким образом, все перестановки распределяются по родам. Обычные меандры — это перестановки рода нуль.

**Задача 11.** Исследуйте распределение перестановок из  $n$  элементов по родам при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 12.** Перенесите предыдущие рассмотрения на меандры, образованные несколькими реками.

**Замечания**

1. Число таких обобщенных меандров, образованных системами замкнутых рек, на проективной плоскости при пересечении с бесконечно удаленным шоссе — это известные числа Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42,...

Число Каталана  $c(n)$  проще всего определить как число способов расстановки скобок в произведении из  $n$  сомножителей. Например,  $c(3) = 2$ . Два способа расстановки скобок — это  $(ab)c$  и  $a(bc)$ . В произведении четырех сомножителей скобки можно расставить пятью способами:

$$((ab)c)d, (ab)(cd), (a(bc))d, a((bc)d), a(b(cd)).$$

Поэтому  $c(4) = 5$  и т. д.

Числа Каталана обладают замечательным свойством неожиданно возникать в самых разных задачах. Подробнее об этом можно узнать из статьи М. Гарднера «Числа Каталана» («Квант», 1978, № 7, с. 20).

2. С задачей о меандрах связана следующая «задача о марках»: сколькими способами можно сложить в стопку ленту, состоящую из  $n$  марок (рис. 4; сверху показан один из способов складывания полоски). Об этой задаче рассказано в книге М. Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 1972, с. 344—353).

(Окончание см. на с. 14)

# ОГЮСТЕН ЛУИ КОШИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Доктор физико-математических наук  
Ю. СОЛОВЬЕВ

Среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического:

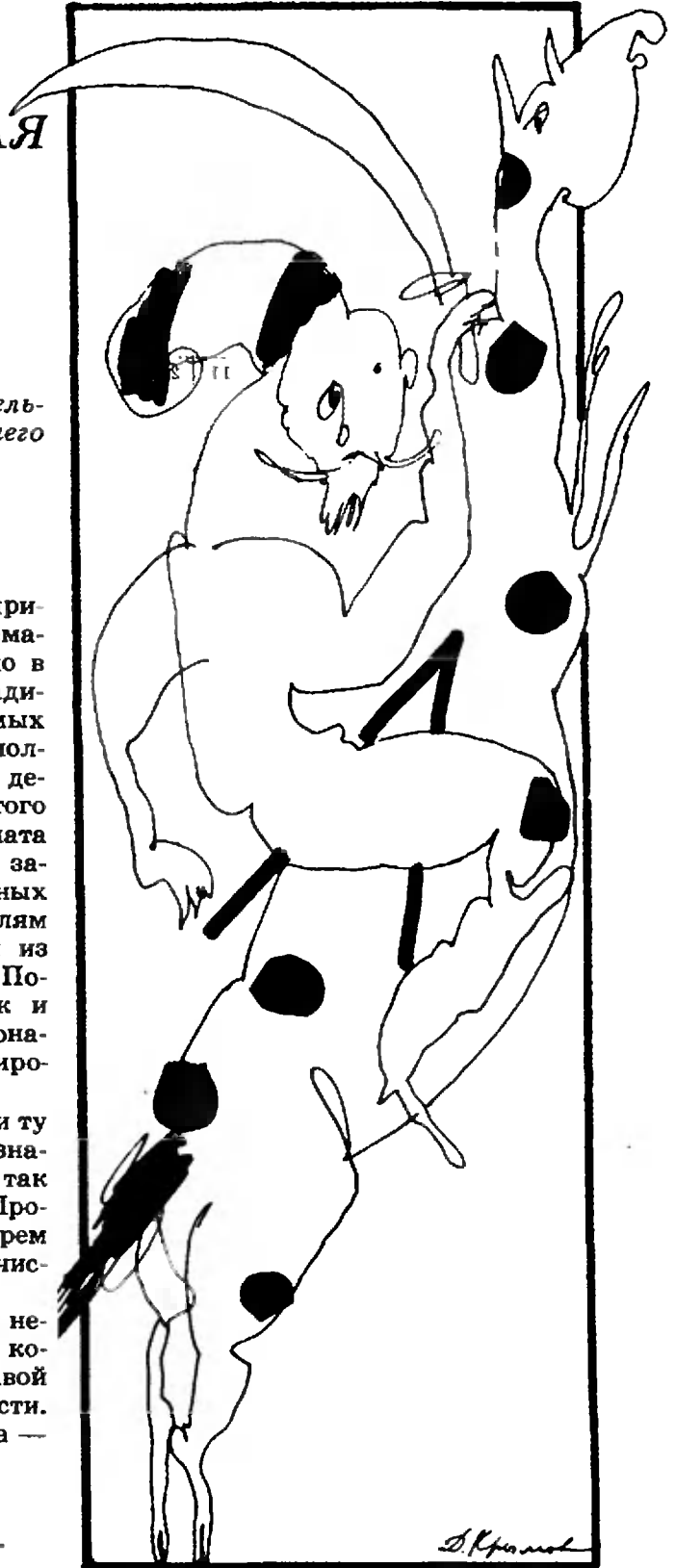
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Это знаменитое неравенство, принадлежащее французскому математику О. Коши, было опубликовано в 1821 году. С тех пор оно традиционно считается одним из самых трудных числовых неравенств. За полтора века появилось несколько десятков различных доказательств этого неравенства. Традиция была начата самим Коши. Его доказательство занимало несколько страниц сложных выкладок. Я предлагаю читателям познакомиться с самым простым из известных мне доказательств. Поэтому, оно так же красиво, как и поучительно. Но в начале нам понадобится несколько переформулировать неравенство Коши.

Зачем переформулировать одну и ту же задачу? Опытные математики знают, что это занятие совсем не так бесполезно, как это кажется... Простые доказательства сложных теорем как правило состоят из многочисленных переформулировок.

В первую очередь, в нашем неравенстве смущает устрашающий корень  $n$ -й степени, стоящий в правой части. Поделим на него обе части. Справа останется единица, а слева — среднее арифметическое чисел

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$



## Переформулировка

При условиях

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0, \\ y_1 y_2 \dots y_n = 1$$

надо доказать, что

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq 1. \quad (*)$$

А теперь вспомним о математической индукции. Будем доказывать неравенство Коши шаг за шагом, каждый раз увеличивая  $n$  на единицу. Для  $n=1$  оно очевидно (и превращается в строгое равенство). Предположим, что нам удалось доказать неравенство при некотором  $n$ . Значит, теперь надо вывести его для  $n+1$ .

### Индуктивный шаг

Нужно доказать, что если

$$z_1 > 0, \dots, z_n > 0, z_{n+1} > 0, \\ z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} = 1,$$

то  $z_1 + \dots + z_n + z_{n+1} \geq n+1$ . Воспользуемся неравенством (\*), которое мы считаем доказанным для  $n$  чисел. Пусть  $y_1 = z_1, \dots, y_{n-1} = z_{n-1}, y_n = z_n z_{n+1}$ . Тогда выполнены оба условия

$$y_1 > 0, \dots, y_n > 0, \\ y_1 y_2 \dots y_n = 1,$$

и мы предполагаем доказанным неравенство  $y_1 + \dots + y_n \geq n$ , т. е.

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n \cdot z_{n+1} \geq n.$$

Заметим, что до сих пор мы занимались одними переформулировками. Но где же само доказательство? Вот оно.

Если надо, то перенумеруем числа  $z_1, \dots, z_{n+1}$  так, чтобы выполнялось  $z_n > 1, z_{n+1} < 1$ . (Ясно, что если все числа  $z_i$  не равны одновременно 1, то среди них найдутся два таких числа.) Теперь в последней формуле заменим произведение  $z_n \cdot z_{n+1}$  на сумму  $z_n + z_{n+1}$ . Для этого надо показать, что  $z_n + z_{n+1} \geq z_n \cdot z_{n+1} + 1$ , или

$$z_n + z_{n+1} - z_n \cdot z_{n+1} - 1 \geq 0.$$

Левую часть разложим на множители:

$$z_n(1 - z_{n+1}) - (1 - z_{n+1}) = \\ = (z_n - 1)(1 - z_{n+1}) \geq 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как  $z_n > 1, z_{n+1} < 1$ . Доказательство закончено.

А теперь — два слова об этом доказательстве. Единственное не вполне очевидное место в нем — это выбор чисел  $z_n, z_{n+1}$ . В целом же на нас работали элементарные переформулировки и математическая индукция.

## Меандры

(Начало см. на с. 11)

3. Многочисленные рисунки меандров можно найти в последней работе Анри Пуанкаре «Об одной геометрической теореме», где он пытался доказать с их помощью, что отображение кольца в себя, сохраняющее площади и сдвигающее граничные окружности в разные стороны, имеет не менее двух неподвижных точек. Теорема Пуанкаре была доказана Биркгофом в 1913 году другим методом, но ее обобщение на отображения сферы с ручками было доказано Я. М. Элиашбергом в 1978 году с помощью меандров (число неподвижных точек, считая с кратностями, не меньше  $2g+2$ , где  $g$  — число ручек).

Из теории меандров вытекают также следующие теоремы:

(1) *Нестягиваемая несамопересекающаяся гладкая замкнутая кривая на проективной плоскости имеет не менее трех точек перегиба.*

(2) *Замкнутая плоская кривая имеет не менее 4 вершин (экстремальных точек кривизны).*

(3) *Назовем участок реки между двумя мостами положительным, если номер следующего моста (вдоль шоссе) больше. Докажите, что число точек перегиба реки не меньше числа сохранений знаков в последовательности знаков участков (меандры с 4 мостами на рисунке 2 имеют последовательности  $(+++)$ ,  $(+-)$ ,  $(--)$ ).*



# АНАЛИЗ И НЕРАВЕНСТВА

Кандидат физико-математических наук  
В. ОВСИЕНКО

Анри Пуанкаре говорил, что математика — это способ говорить одно и то же о совершенно разных вещах. Особенно это относится к математическому анализу, который подобно отмычке в руках опытного взломщика дает «универсальные ключи от всех дверей»...

Мы поговорим о трех совершенно разных задачах, которые решим одним и тем же способом. В основе решения будет хорошо известное из школьного курса утверждение: если производная некоторой функции больше нуля, то эта функция — возрастающая (и наоборот, если производная меньше нуля, то она — убывающая).

## Неравенства на синус и косинус

### Неравенства

$$\sin x < x,$$

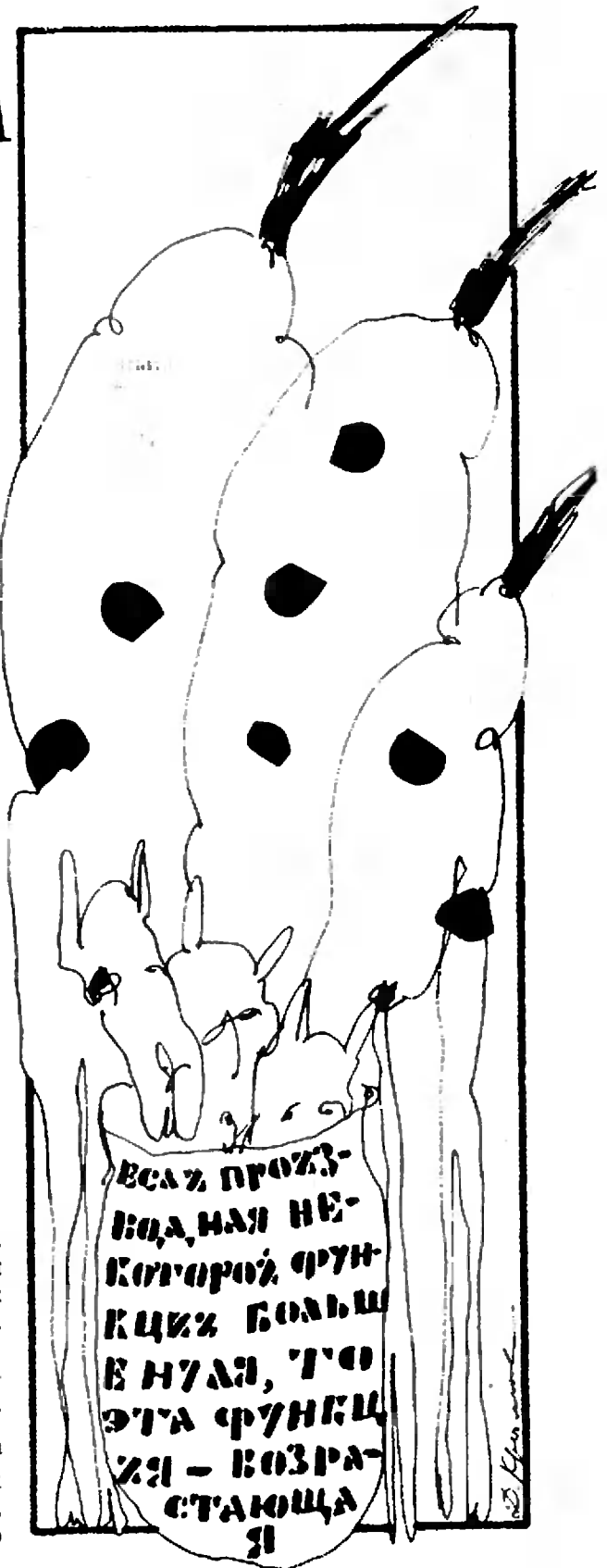
$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

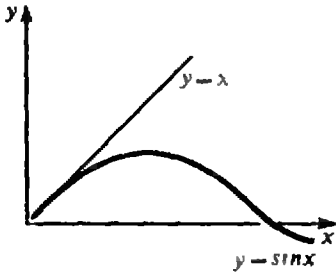
справедливые при  $x > 0$  (рис. 1), обычно доказываются (в школе) геометрически. Аналитическое доказательство, между тем, гораздо проще и не требует большой изобретательности.

Начнем с первого неравенства. Функции  $y_1(x) = \sin x$  и  $y_2(x) = x$  совпадают в нуле. Поэтому достаточно доказать, что при  $x > 0$  вторая функция растет быстрее, чем первая (т. е. что  $y(x) = x - \sin x$  возрастающая функция при  $x > 0$ ). Но производная  $y'(x) = 1 - \cos x$  больше нуля при  $x > 0$ . Неравенство доказано.

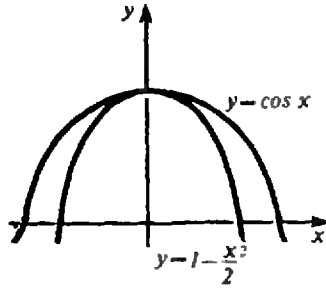
Для доказательства второго неравенства поступим точно так же.

Функция  $y(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$  равна нулю при  $x = 0$ . Ее производная  $y'(x) = -\sin x + x$ . Таким образом,  $y'(x) > 0$  при  $x > 0$  (в силу первого





а)



б)

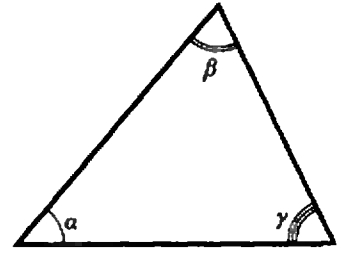


Рис. 2.

Рис. 1.

неравенства), т. е. функция возрастает и, следовательно, положительна.

**Упражнения**

1. Докажите, что при  $x > 0$

а)  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ ,

б)  $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

Указание. Поступайте как и раньше. После дифференцирования пользуйтесь предыдущими неравенствами.

2. Продолжите цепочку полученных неравенств на  $\sin x$  и  $\cos x$ .

**Неравенства в треугольнике**

Для треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 2) справедливо неравенство

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Докажем его. Во-первых, заметим, что равенство выполняется, если треугольник — правильный ( $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ).

Пусть треугольник равнобедренный, и его углы равны  $\alpha = 60^\circ + x, \beta = \gamma = 60^\circ - \frac{x}{2}$ , где  $x$  — некоторое число такое, что  $-60^\circ < x < 120^\circ$ . Тогда выражение  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  — функция от  $x$ :

$$f(x) = \sin(60^\circ + x) + 2\sin(60^\circ - \frac{x}{2}).$$

Ее производная есть  $f'(x) = \cos(60^\circ + x) - \cos(60^\circ - \frac{x}{2})$ . Ясно, что  $f'(x) > 0$  при  $-60^\circ < x < 0$  и  $f'(x) < 0$  при  $0 < x < 120^\circ$ . Поэтому функция  $f(x)$  имеет максимум в точке  $x = 0$  и тем меньше, чем дальше  $x$  от нуля.

Пусть теперь при фиксированном  $\alpha$  изменяются углы  $\beta$  и  $\gamma$ :  $\beta = \delta - x,$

$\gamma = \delta + x$ . Тогда исходное выражение опять будет функцией от  $x$ :

$$f(x) = \sin(\delta - x) + \sin(\delta + x) + \sin \alpha.$$

Ее производная  $f'(x) = \cos(\delta + x) - \cos(\delta - x)$ . Снова  $f'(x)$  больше нуля для отрицательных  $x$  и меньше нуля для положительных  $x$ . Другими словами, выражение  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  тем меньше, чем сильнее треугольник отличается от равнобедренного.

Неравенство доказано, поскольку любой треугольник можно получить из равностороннего, сначала меняя угол  $\alpha$ , а затем уже  $\beta$  и  $\gamma$ . Мы убедились, что при таком изменении выражение  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  будет все время убывать.

Упражнение 3. Докажите неравенства

а)  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$ ,

б)  $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ,

в)  $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$ ,

если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы некоторого треугольника.

**Неравенство Коши**

Для любых неотрицательных чисел  $a_1, \dots, a_n$  справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

между средним арифметическим и средним геометрическим. Оно называется *неравенством Коши*. Мы докажем его с помощью все того же способа, т. е. вычисляя производную от некоторой функции.

Для разминки начнем с доказательства совсем простого случая  $n = 2$ .

Конечно, неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

доказывается разнообразными геометрическими способами (в том числе и очень красивыми). Мы же отработаем на нем наш метод. Пусть для определенности  $a \leq b$ . Тогда  $b = a + x$ , где  $x$  — некоторое неотрицательное число. Выражение  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$  становится функцией от  $x$ , имеющей вид

$$f(x) = \frac{2a+x}{2} - \sqrt{a(a+x)}.$$

При  $x=0$  функция  $f(x) = 0$ , ее произ-

водная  $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{a+x}} > 0$ .

Поэтому функция  $f(x)$  — возрастающая, т. е. среднее арифметическое тем больше среднего геометрического, чем больше разность  $b - a = x$ .

А теперь докажем неравенство Коши в общем случае. Фактически это доказательство — повторение предыдущего. Нам только потребуется зна-

ние производной функции  $\sqrt[k]{x^k} = x^{\frac{k}{k}}$ . Она вычисляется в школьном учеб-

нике:  $(x^{\frac{k}{n}})' = \frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}$ .

Пусть для определенности  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Ясно, что при  $a_1 = \dots = a_n$  наше неравенство превращается в равенство. Мы возьмем  $n$  одинаковых чисел  $a_1, a_1, \dots, a_1$  и будем увеличивать их (начиная со второго), но не за один шаг, а в  $(n-1)$  шагов. На первом шаге —

$$a_1, \underbrace{a_1+z, \dots, a_1+z}_{n-1}$$

(где  $a_1+z = a_2$ ),

на втором шаге —

$$a_1, a_2, \underbrace{a_2+y, \dots, a_2+y}_{n-2}$$

(где  $a_2+y = a_3$ ).

В конце концов мы получим набор чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Мы докажем, что на любом шаге разница между средним арифметическим и средним геометрическим уве-

личивается. Тем самым мы не просто получим неравенство Коши, но даже увидим его «динамичку». На  $m$ -м шаге мы имеем такой набор чисел:

$$a_1, \dots, a_m, \underbrace{a_m+x, \dots, a_m+x}_{n-m}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

как функцию от  $x$ :

$$f(x) = \frac{a_1 + \dots + a_m(n-m+1) + (n-m)x}{n} - \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_m(a_m+x)^{n-m}}.$$

Ее производная легко вычисляется:

$$f'(x) = \frac{n-m}{n} - \frac{n-m}{n} \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_m}{(a_m+x)^n}}.$$

Очевидно, что  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ ! Ведь под корнем в этом выражении стоит число

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_m}{(a_m+x)^n} = \frac{a_1}{a_m+x} \cdot \frac{a_2}{a_m+x} \cdot \dots \cdot \frac{a_m}{a_m+x} < 1.$$

Неравенство Коши доказано.

Два других доказательства этого неравенства можно найти в статьях «Огюстен Луи Коши и математическая индукция», а также «Сумма минимумов и минимум суммы» в этом номере журнала. О достоинствах и недостатках всех трех доказательств судить читателям.

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1271—M1275, Ф1278—Ф1282

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1271» или «Ф1278». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**M1271.** Дана полуокружность с диаметром  $AB$ . Постройте хорду  $MN$ , параллельную  $AB$ , так, чтобы трапеция  $AMNB$  была описанной.

*В. Сендеров*

**M1272.** Докажите, что для любых  $n$  положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

*Л. Курляндчик*

**M1273.** На сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$ , как на основаниях, вне его построены подобные равнобедренные треугольники  $ABC_1, CBA_1$  и  $CAB_1$ , у каждого из которых отношение высоты к основанию равно  $k$ . Такие же треугольники  $ABC_2, CBA_2$  и  $CAB_2$  построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади  $S, S_1$  и  $S_2$  треугольников  $ABC, A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  связаны соотношением

$$S_1 \pm S_2 = S(1 + 3k^2)/2$$

(знак «+» или «-» зависит от ориентации треугольника  $A_2B_2C_2$  по отношению к  $ABC$ ).

*Р. Сарбаш, А. Елизаров*

**M1274.** Докажите, что разность между числами

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n-1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n-1 + \frac{1}{n}}}}}$$

по модулю не превосходит  $\frac{1}{(n-1)!n!}$ .

*Г. Гальперин*

**M1275\*.** Последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такова, что при любом  $k > 1$

$$a_{k+1} = a_k + a_k + 1.$$

Докажите, что при  $k > 9$  число  $a_k - 22$  — составное.

*С. Генкин*

**Ф1278.** Летевший вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадают на землю в течение промежутка времени  $t$ . Найдите скорость осколков в момент взрыва.

*О Саваченко*

**Ф1279.** Прочный цилиндрический сосуд объемом  $V = 10$  л, содержащий  $m = 3$  г кислорода, разделя-

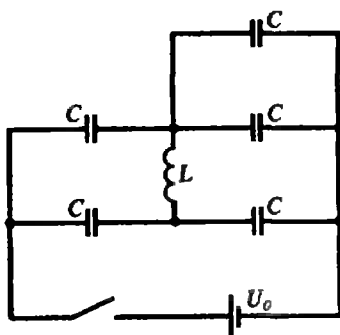
## Задачник „Квант“

ют тонкой перепонкой, которая выдерживает разность давлений  $\Delta p = 1000$  Па. В левой части сосуда (она составляет  $1/3$  объема сосуда) включают нагреватель. Благодаря теплопроводности перепонки, тепло перетекает в правую часть сосуда. Известно, что при разности температур  $\Delta T = 1$  К за одну секунду перетекает количество теплоты  $\Delta Q = 0,2$  Дж. При какой максимальной мощности нагревателя перепонка останется целой в процессе длительного нагревания?

Р. Александров

**Ф1280.** В коробке с тремя выводами  $A$ ,  $B$  и  $C$  находится неизвестная схема, состоящая из резисторов. При помощи омметра измерены сопротивления между различными выводами:  $R_{AB} = 10$  Ом,  $R_{BC} = 20$  Ом,  $R_{AC} = 30$  Ом. К точкам  $A$  и  $C$  подключают батарейку напряжением  $U = 1,5$  В, а между  $B$  и  $C$  — амперметр, сопротивление которого  $r = 5$  Ом. Что он покажет?

А. Сашич



**Ф1281.** Из пяти одинаковых конденсаторов и катушки собрана схема, показанная на рисунке. Найдите максимальный ток через катушку после подключения батарейки напряжением  $U_0$ . Найдите также максимальное напряжение на параллельно соединенных конденсаторах. Сопротивление проводов считать малым.

А. Зильберман

**Ф1282.** Куб с ребром  $a = 10$  см, имеющий массу  $M = 1$  кг, подвешен на пружине жесткостью  $k = 400$  Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток упругих шариков, обладающих скоростью  $v_0 = 20$  м/с на высоте первоначального положения основания куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно. Найдите период этих колебаний. Оцените время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза. Масса каждого шарика  $m = 1$  г, концентрация шариков в потоке  $n = 1000$  м<sup>-3</sup>, столкновениями шариков между собой пренебречь.

И. Маркин

## Решения задач

М1246—М1249, Ф1258—Ф1262

**М1246.** Докажите, что в любой арифметической прогрессии, члены которой — натуральные числа найдутся два числа с одинаковой суммой цифр.

Пусть  $a$  — первый член, а  $d$  — разность прогрессии. Можно считать, конечно, что  $d > 0$ . Тогда все члены прогрессии вида  $a + 10^n d$ , где  $n$  достаточно велико (так что  $10^n > a$ ), имеют одинаковую сумму цифр, равную сумме всех цифр  $a$  и  $d$ .

С. Гейкин

# Задачник „Квант“

**M1247.** Можно ли покрыть всю плоскость квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ... (без наложений), используя каждый квадрат не более а) десяти раз; б) одного раза?

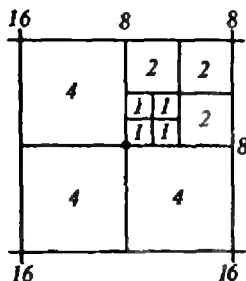


Рис. 1.

Ответ: а) можно; б) нельзя.

а) Пример покрытия (где квадрат со стороной 1 используется 4 раза, а остальные — по 3 раза) приведен на рисунке 1.

б) Предположим, что существует покрытие, в котором все квадраты различны. Поскольку сумма всех чисел, не превосходящих  $2^{n-1}$ , меньше  $2^n$  ( $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ ), то к каждой стороне любого из квадра-

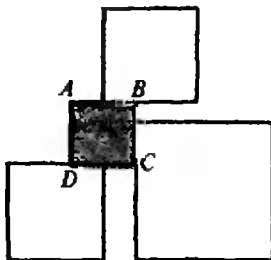


Рис. 2.

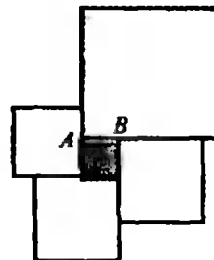


Рис. 3.

тов нашего покрытия должна примыкать сторона большего квадрата. Отсюда следует, что каждая вершина квадрата должна лежать на стороне большего квадрата (если вершина  $B$  квадрата  $ABCD$  лежит на стороне большего квадрата, примыкающего к стороне  $AB$  (рис. 2), то вершина  $C$  будет лежать на стороне большего квадрата, примыкающего к  $BC$ , и т. д.). Рассмотрим теперь наименьший из всех квадратов покрытия. Четыре квадрата будут примыкать к нему так, как показано на рисунке 3. Рассмотрим больший из этих квадратов — пусть он примыкает к стороне  $AB$  наименьшего (на рисунке — это голубой квадрат). Тогда вершина  $A$  этого квадрата не лежит на стороне большего, чем он, квадрата. Получили противоречие.

Д. Фомин

**M1248.** На отрезке находятся несколько меньших отрезков, покрывающих его целиком.

а) Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины исходного отрезка.

б) Докажите, что если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину — правую или левую, — то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Заметим прежде всего, что можно исключить отрезки целиком содержащиеся в других отрезках. Далее, занумеровав отрезки в произвольном порядке, поочередно сделаем с каждым такую операцию: заменим его наименьшим отрезком с той же серединой так, чтобы отрезки по-прежнему покрывали исходный. (При этом выбранные половины сокращаются, и их объединение только уменьшится.) Повторяя эти операции, придем к системе, в которой каждый отрезок может иметь общие внутренние точки (пересекаться по отрезку) не более чем с одним из остальных. Таким образом, весь исходный отрезок разбит на куски, каждый из которых покрыт содержащимися в нем одним или двумя отрезками. Поэтому достаточно доказать утверждения лишь для случая двух отрезков. Это в обоих случаях нетрудно.

## Задачник „Квант“

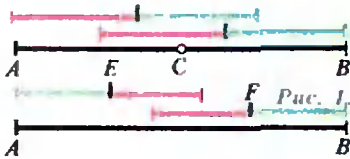


Рис. 2.

Утверждение а) очевидно, если левые половины отрезков не пересекаются: ведь сумма длин двух отрезков больше длины  $d$  их объединения, поэтому сумма их половин больше  $d/2$ . Если же левые половины пересекаются (рис. 1), то утверждение следует из того, что середина правого отрезка лежит правее середины  $C$  всего рассматриваемого куска  $AB$ , т. е. эти половины покрывают  $AC$ .

Утверждение б) очевидно, если хотя бы один из отрезков не меньше  $2/3 d$ , где  $d$  — покрываемый ими кусок. В другом случае (рис. 2) расстояние между их серединами  $E$  и  $F$  не меньше  $d/3$ , а выбранные половины отрезков либо не пересекаются, либо покрывают отрезок  $EF$ .

Д. Фомих

**M1249\*.** В королевстве Олимпия  $n > 6$  городов, каждые два из которых соединены одной дорогой с односторонним движением. При этом не из каждого города можно проехать в любой другой (не нарушая правил движения).

а) Докажите, что король может выбрать один из городов  $u$ , изменив направление на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.

б) Верно ли это утверждение для  $n=6$  городов?

Докажем сначала для  $n=7$ , городов утверждение а). Будем говорить, что два города эквивалентны, если из каждого из них можно проехать в другой. Тогда все 7 городов разобьются на группы эквивалентных между собой городов, причем из каждых двух групп одна «мажорирует» другую, в том смысле, что все дороги из одной группы ведут в другую. Рассмотрим случай, когда таких групп больше двух. Пусть  $u$  — предпоследняя группа (рис. 1). Выбрав в группе  $u$  любой город  $Y$  и изменив направления всех дорог, соединяющих его с другими городами, мы получим искомое: из  $Y$  можно теперь попасть в группу  $a$ , а из нее — в любой другой город; и наоборот, в  $Y$  можно попасть из последней группы  $z$ , а в нее — из любого другого города. Осталось рассмотреть случай, когда групп всего две (рис. 2). Пусть в группе  $a$  всего  $x$  городов, в группе  $b$  —  $(7-x)$ . Можно считать, что  $x$  не меньше 4 (иначе заменим все стрелки на противоположные). Разберем три случая: 1)  $x=4$ ; 2)  $x=5$ ; 3)  $x=6$ . Впрочем, сразу заметим, что случай  $x=5$  невозможен, поскольку группа не может состоять из двух эквивалентных городов.

Для дальнейшего удобно использовать такую лемму:

*В группе из любого числа  $k > 3$  эквивалентных городов всегда существует замкнутый путь, проходящий (по направлению стрелок) через все города по разу («гамильтонов цикл»).*

Доказательство леммы приведем в конце решения.

Рассмотрим оставшиеся случаи. 1) При  $x=4$  группа выглядит так, как показано на рисунке 3 (направление шестой, непоказанной дороги несущественно). В качестве нужного города надо выбрать  $C$ . 3) При  $x=6$  группа  $a$  выглядит так, как показано на рисунке 4 (направление других дорог пока не существенно). Предполагая, что не существует города, при изменении направлений всех дорог в котором можно будет доехать из него до любого города из группы  $a$ , можно заключить, что дороги направлены так, как показано на рисунке 5. Но тогда в качестве нужного города можно выбрать любой из шести городов.



Рис. 1.



Рис. 2.

## Задачник „Квант“

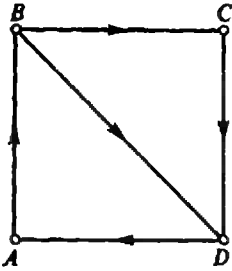


Рис. 3.

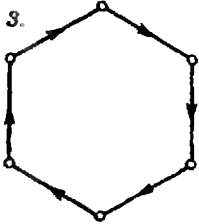


Рис. 4.

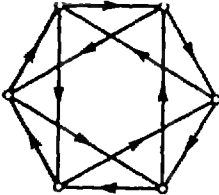


Рис. 5.

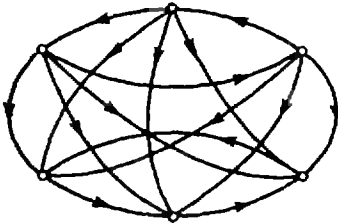


Рис. 6.

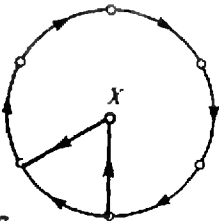


Рис. 7.

Итак, для  $n=7$  утверждение задачи а) доказано.

При  $n>7$  его можно доказать методом индукции. Прежде всего, выберем из городов такой, в который входит не менее двух дорог и из которого выходит не менее двух дорог. (Если такого города нет, то имеется 4 города, в каждый из которых входит не более одной дороги, или 4 города, из которых выходит не более одной дороги. Но это невозможно, поскольку у шести дорог между четырьмя городами 6 «начал» и 6 «концов».) Среди оставшихся  $(n-1)$  городов по предположению индукции есть такой, «обращением» всех дорог в котором можно добиться желаемого эффекта. Он же, очевидно, годится и для всех  $n$  городов.

Рисунок 6 показывает, что для  $n=6$  городов утверждение неверно, т. е. ответ на вопрос б) отрицателен. (Интересно, что этот пример единственный, как говорят, с точностью до изоморфизма.)

В заключение докажем лемму о гамильтоновом цикле (для  $k=3$  городов она очевидна). Будем рассуждать по индукции. Удалим любой из  $k>3$  городов — город  $X$ . Если оставшиеся  $(k-1)$  городов после этого образуют несколько групп эквивалентности (как на рисунке 1, причем некоторые стрелки из группы  $z$  идут в  $X$ , а из  $X$  — в группу  $a$ ), то поскольку в каждой из групп  $a, b, \dots, y, z$  по предположению индукции есть гамильтонов цикл, из них очевидно составляется гамильтонов цикл, проходящий через все  $k$  городов. Если же оставшиеся  $(k-1)$  городов образуют одну группу эквивалентности, то в ней есть гамильтонов цикл, причем среди дорог, соединяющих эти города с  $X$ , есть как входящие в  $X$ , так и выходящие из него. Проходя по этому циклу, мы можем найти два соседних города таких, что из первого идет дорога в  $X$ , а во второй — приходит дорога из  $X$  (рис. 7). Таким образом, мы можем включить  $X$  в этот цикл.

Заметим, что с помощью этой леммы можно доказать утверждение а) сразу для любого  $n$ , большего 7, — примерно так, как это сделано выше для  $n=7$  городов.

И. Игенберг, Д. Фомин

**Ф1258.** На горизонтальном столе находится катушка радиусом  $R$ . На катушку намотана тонкая невесомая нить, радиус намотки равен  $r$ . Нить пропущена через маленькое отверстие на высоте  $h$  от поверхности стола ( $h>R$ ). В начальный момент катушка неподвижна, а нить вер-

Ясно, что катушка, расположенная так, как показано на рисунке 1, начнет катиться вправо. Определим, в каком положении катушка будет иметь максимальную скорость.

В произвольный момент времени на катушку действуют три силы — сила натяжения нити  $T$ , равная по величине  $F$ , сила тяжести  $Mg$  и сила реакции опоры  $F_p$  (рис. 2). Рассмотрим моменты всех сил относительно точки опоры. Силы  $Mg$  и  $F_p$  имеют нулевые моменты, а момент силы  $T$  ускоряет вращение катушки по часовой стрелке и, следовательно, увеличивает скорость ее



тикальна (рис. 1). За нить начинают тянуть с постоянной силой  $F$ , и катушка катится по столу без проскальзывания. Найти максимальную скорость катушки  $M$ . Считайте, что половина массы сосредоточена на оси катушки, а вторая половина распределена по внешней ободу радиусом  $R$ . Нить считать гладкой.

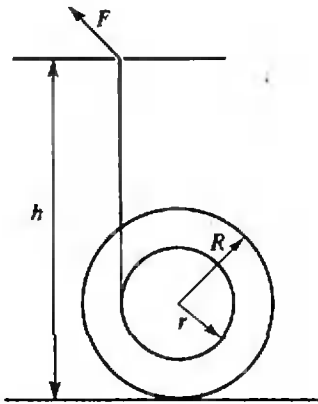


Рис. 1.

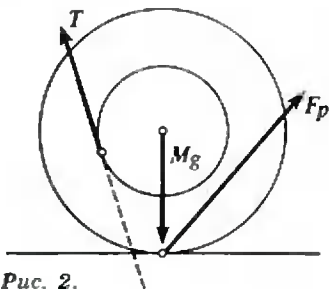


Рис. 2.

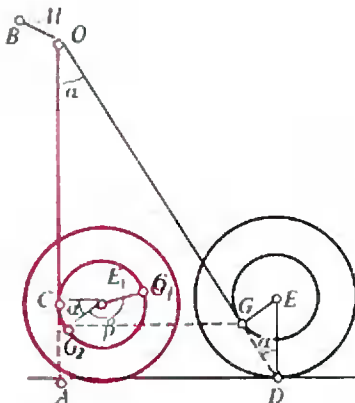


Рис. 3.

## Задача № "Кванта"

горизонтального движения вправо. Понятно, что максимальной эта скорость станет тогда, когда продолжение нити будет проходить через точку опоры (точка  $D$  на рисунке 3). При дальнейшем движении момент силы  $T$  станет ормозающим, через некоторое время катушка остановится и покатится назад.

Чтобы вычислить максимальную скорость катушки, воспользуемся законом сохранения энергии — кинетическая энергия катушки равна работе внешних сил. Единственный источник энергии здесь — экспериментатор, который тянет за конец нити с силой  $F$ . Работа этой силы равна

$$A = F\Delta l,$$

где  $\Delta l$  — длина участка нити, вытянутого через отверстие при движении катушки от начального до интересующего нас положения. Найдем  $\Delta l$ , сравнив «свободную» длину нити в начальном и конечном положениях (см. рис. 3).

Пусть точка  $O$  — это конец нити в начальный момент, а точка  $G$  — это точка касания нити и катушки в конечный момент. Чтобы найти положение этой точки в начальный момент, мысленно перекажем катушку обратно. При этом нить частично наматывается на катушку, и точка  $G$  перейдет в точку  $G_1$  (промежуточная точка  $G_2$  получается из  $G$  параллельным переносом катушки из конечного положения в начальное). Итак, длина рассматриваемого участка нити в конечном положении равна  $BO + OG$ , в начальном  $OC + \cup CG_1$ . Приравняв эти два выражения, найдем

$$\Delta l = BO = OC + \cup CG_1 - OG.$$

Вычислим все входящие сюда величины. Непосредственно из рисунка 3 получаем

$$OC = h - R, \quad OG = OD - DG = h/\cos \alpha - R \cos \alpha.$$

Осталось вычислить длину нити, намотанной на катушке. Разложим эту длину на две:

$$\cup CG_1 = \cup CG_2 + \cup G_1G_2.$$

При перекачивании катушки из конечного положения в начальное ее угол поворота равен

$$\beta = \angle G_1E_1G_2 = \frac{EE_1}{R} = \frac{AD - r}{R} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha - r}{R}.$$

Поэтому длина нити на участке от  $G_1$  до  $G_2$  есть

$$\cup G_1G_2 = r\beta = r \frac{h \operatorname{tg} \alpha - r}{R}.$$

Вместе с тем

$$\angle CE_1G_2 = \angle EDG = \alpha,$$

поэтому

$$\cup CG_2 = r\alpha.$$

Окончательно получим

$$\Delta l = h - R + \frac{r}{R}(h \operatorname{tg} \alpha - r) + r\alpha - \frac{h}{\cos \alpha} + R \cos \alpha,$$

## Задачник „Кванта“

или, выразив все функции угла  $\alpha$  через  $\sin \alpha = r/l$ ,

$$\Delta l = r \arcsin \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R} + (h-R) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right).$$

Вычислим теперь кинетическую энергию движущейся катушки. Катушка, катящаяся без проскальзывания со скоростью  $v$ , вращается с линейной скоростью, тоже равной  $v$ , поэтому кинетическая энергия катушки равна

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{2} v^2 = \frac{3}{4} M v^2.$$

Теперь из закона сохранения энергии  $E_k = A$  получим ответ:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{F}{M} \left( r \arcsin \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R} + (h-R) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right) \right)}.$$

Интересно отметить, что формула дает осмысленную величину для  $v$  и при  $r=R$ , хотя в этом случае равновесие моментов сил (см. рис. 3) никогда не наступает — момент силы натяжения нити все время ускоряет катушку. Вместе с тем, хотя путь катушки и бесконечен, через отверстие проходит лишь конечный участок нити, и скорость катушки оказывается ограниченной.

А. Ходуляев

**Ф1259.** Свисток издает звук частоты  $f_0 = 2000$  Гц. Как изменится частота звука, если температура воздуха поднимется от 20 до 40 градусов по Цельсию? Какой тон будет издавать свисток в воздушном колоколе для подводных работ, в который подается дыхательная смесь из гелия и кислорода под давлением 1,5 атм? Парциальное давление кислорода принять равным 0,3 атм. Как изменится в этом колоколе тон речи человека? Нужно ли будет перестраивать гитару, чтобы она звучала в колоколе так, как снаружи?

Частота свистка определяется размерами свистка (зависимость — обратная) и скоростью звука (зависимость — прямая). Если пренебречь изменением размеров свистка при нагреве от 20 до 40 градусов по Цельсию, то все определяется возрастанием скорости звука (которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры) в  $313/293 = 1,033$  раза. Значит, частота станет равной 2066 Гц. Разница, конечно, не очень большая, однако совершенно недопустимая для музыкальных инструментов — особенно в оркестре. При конструировании духовых инструментов принимают специальные меры, чтобы настройка практически не менялась при изменении температуры в заданных пределах. Подумайте сами, как этого можно достичь.

Второй вопрос несколько сложнее. Вспомним, что обычно мы дышим смесью кислорода (его молярная масса 32 г/моль) и азота (28 г/моль). Азота больше, и полученная газовая смесь имеет среднюю молярную массу 29 г/моль. Смесь гелия и кислорода имеет явно меньшую молярную массу, и поэтому скорость звука в смеси будет больше, а тон речи человека — выше (ведь «размеры» голосового аппарата остаются прежними). Остается найти молярную массу смеси кислорода и гелия. Это можно сделать так.

# Задачник „Квант“

В объеме  $V$  число молей кислорода  $\nu_x = p_x V / (RT)$ , гелия  $\nu_r = p_r V / (RT)$ , а полная масса смеси  $m = m_x + m_r = M_x \nu_x + M_r \nu_r$ . Тогда молярная масса смеси

$$M = (p_x M_x + p_r M_r) / (p_x + p_r) = 9,6 \text{ г/моль.}$$

Итак, высота тона возрастет в  $\sqrt{29/9,6} = 1,74$  раза (получится «голос Буратино»), и частота тона станет равной 3480 Гц.

А вот гитару перестраивать не придется — частота колебаний струны определяется совсем другими параметрами.

А. Зильберман

**Ф1260.** Хорошо всем известная бесконечная цепочка резисторов (рис. 1) содержит резисторы  $r$  и  $R$ . Чему равно сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами (разделенными ровно одним резистором  $r$ )? Чему равно сопротивление, измеренное между двумя узлами, которые находятся очень далеко друг от друга? Найти это сопротивление в общем случае, когда между интересующими нас точками включено ровно  $n$  резисторов  $r$ .

В первом случае цепочку можно перерисовать так, как показано на рисунке 2, где  $\rho$  — сопротивление полубесконечной цепочки, изображенной на рисунке 3. Из соотношения

$$r + \frac{R\rho}{R+\rho} = \rho$$

легко получаем

$$\rho = r(1 + \sqrt{1 + 4R/r})/2.$$

Тогда сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами  $A$  и  $B$ , будет равно

$$R_1 = R_{AB} = \frac{2R\rho r}{2R\rho + rR + r\rho} = \frac{2Rr}{\rho + 2R}.$$

Если узлы  $A$  и  $B$  находятся очень далеко друг от друга, то схему можно заменить такой, как на рисунках 4 и 5. Отсюда

$$R_\infty = R_{AB} = \frac{2\rho R}{2R + \rho}.$$

Пусть теперь между  $A$  и  $B$  включено  $N$  звеньев цепочки. Применим принцип суперпозиции. Подключим между узлом  $A$  и нижним проводом  $O$  батарею с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 6). Если принять потенциал провода за ноль, то потенциалы и токи будут равны

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \mathcal{E}, \quad \varphi_B = \mathcal{E}(1 - r/\rho)^N, \quad \varphi_O = 0, \\ I_A &= I = \mathcal{E}(1/R + 2/\rho), \quad I_B = 0, \quad I_O = -I. \end{aligned}$$

Если же вместо предыдущей взять батарею противоположной полярности и включить ее между  $O$  и  $B$ , то

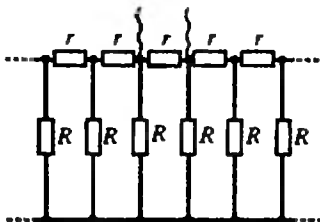


Рис. 1.

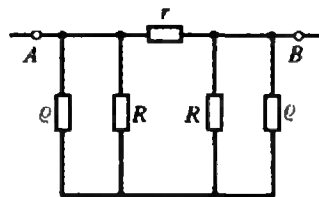


Рис. 2.

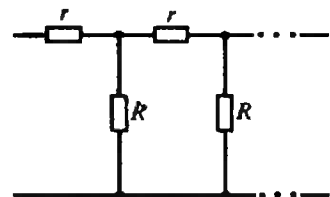


Рис. 3.

# Задача „Кванта“

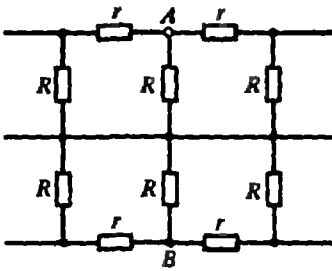


Рис. 4.

токи и потенциалы окажутся равными

$$\varphi'_A = -\mathcal{E}(1-r/\rho)^N, \varphi'_B = -\mathcal{E}, \varphi'_0 = 0, \\ I'_A = 0, I'_B = -I, I'_0 = I.$$

Сложим токи и напряжения в этих двух ситуациях и получим

$$\varphi''_A = \mathcal{E}(1-(1-r/\rho)^N), \varphi''_B = -\mathcal{E}(1-(1-r/\rho)^N), \varphi''_0 = 0, \\ I''_A = I, I''_B = -I, I''_0 = 0.$$

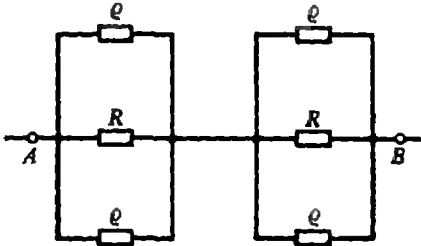


Рис. 5.

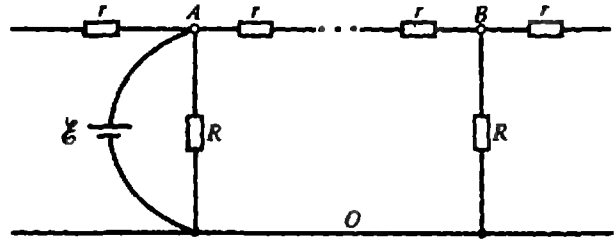


Рис. 6.

Поскольку через узел  $O$  ток не течет, можно считать, что сопротивление между узлами  $A$  и  $B$  равно

$$R_N = R_{AB} = \frac{\varphi''_A - \varphi''_B}{I} = \frac{2R\rho}{2R + \rho} \left(1 - \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^N\right).$$

Заметим, что при  $N=1$  получается ответ для первого случая, а при  $N \rightarrow \infty$  — для второго.

П. Родик

**Ф1261.** К батарейке напряжением  $U_0=4$  В последовательно подключены два конденсатора, емкости которых  $C_1=1$  мкФ и  $C_2=3$  мкФ. катушку индуктивностью  $L=1$  Гн подключают параллельно конденсатору  $C_1$ . Найти амплитуду тока в катушке. К моменту подключения катушки напряжения на конденсаторах считать установившимися. Потерями в цепи пренебречь.

Для нахождения максимального тока через катушку проще всего воспользоваться законом сохранения энергии. В тот момент, когда ток через катушку максимален, ЭДС индукции равна нулю, и все напряжение батарейки оказывается приложенным к конденсатору  $C_2$ . До подключения катушки заряды каждого из конденсаторов были равны

$$q_0 = C_1 C_2 U_0 / (C_1 + C_2).$$

Значит, батарейка «протокнула» по цепи дополнительный заряд

$$q_{\text{бат}} = \Delta q = C_2 U_0 - q_0 = C_2^2 U_0 / (C_1 + C_2)$$

и совершила при этом работу

$$A_{\text{бат}} = q_{\text{бат}} U_0.$$

Запишем баланс энергий:

$$W_{\text{нач}} + A_{\text{бат}} = W_{\text{кон}},$$

или

$$C_1 C_2 U_0^2 / (2(C_1 + C_2)) + C_2^2 U_0^2 / (C_1 + C_2) = C_2 U_0^2 / 2 + L I_m^2 / 2.$$

Отсюда находим максимальное значение тока в катушке:

## Задачник „Квант“

$$I_m = C_2 U_0 / \sqrt{L(C_1 + C_2)} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Ток через катушку имеет нулевое среднее значение и изменяется по гармоническому закону, значит, амплитуда тока равна вычисленному значению. Попробуйте найти самостоятельно частоту колебаний в системе. На всякий случай — ответ: примерно 80 Гц.

*Р. Александров*

**Ф1262.** Электрический вентилятор с асинхронным двигателем, включенный в сеть напряжением 220 В, развивает 1800 об/мин. Чтобы он не гудел так громко, его подключают через автотрансформатор к напряжению 127 В. С какой скоростью он будет вращаться? Считайте, что нагрузка на лопасти вентилятора определяется перегоняемым воздушным потоком. Трение в подшипниках пренебречь. Силу тока в обмотках статора считать зависящей только от приложенного напряжения.

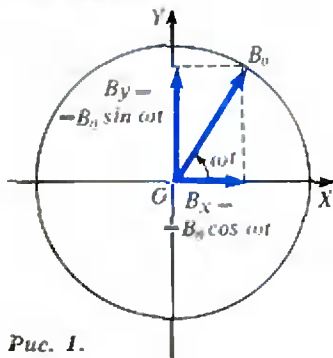


Рис. 1.

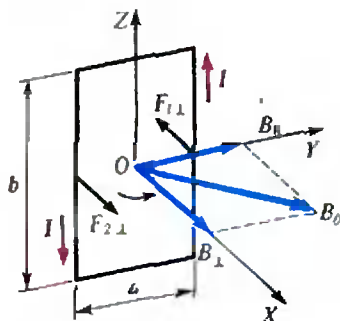


Рис. 2.

Основу асинхронного двигателя переменного тока составляют статор с несколькими обмотками, создающими вращающееся магнитное поле, и ротор, представляющий собой сплошной металлический цилиндр или конструкцию типа «беличье колесо».

В однофазном двигателе вращение магнитного поля достигается за счет сдвига по фазе на  $90^\circ$  синусоидальных переменных токов равной величины, текущих по двум взаимно перпендикулярным обмоткам статора.

При этом  $x$ -составляющая магнитного поля равна  $B_x = B_0 \cos \omega t$ ,  $y$ -составляющая —  $B_y = B_0 \sin \omega t$ , а результирующее поле  $\vec{B}_0$  вращается в плоскости  $XY$  против часовой стрелки с частотой  $\omega$  питающих токов (рис. 1).

Рассмотрим силы, действующие на ротор, считая его для простоты прямоугольной металлической рамкой со сторонами  $a$  и  $b$ . Вначале обсудим случай, когда рамка с осью вращения  $OZ$  закреплена неподвижно в плоскости  $YZ$ , а вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}_0$ , лежащий в плоскости  $XY$ , вращается вокруг оси рамки с частотой  $\omega_0$  против часовой стрелки (рис. 2). Составляющая поля, перпендикулярная плоскости рамки, равна

$$B_{\perp} = B_0 \cos \omega_0 t,$$

параллельная —

$$B_{\parallel} = B_0 \sin \omega_0 t.$$

Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен

$$\Phi = B_{\perp} S = B_0 S \cos \omega_0 t,$$

где  $S = ab$  — площадь рамки. ЭДС индукции, возникающая в рамке, есть

$$\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi}(t) = B_0 S \omega_0 \sin \omega_0 t,$$

а ток в рамке —

$$I = \mathcal{E}_i / R = B_0 S \omega_0 / R \sin \omega_0 t,$$

где  $R$  — омическое сопротивление. Вращающий момент относительно оси рамки создают только перпендикулярные плоскости  $YZ$  составляющие сил Ампера, действующих на стороны, параллельные оси, —

$$F_{1\perp} = F_{2\perp} = F = B_{\perp} I b = B_0^2 b S \omega_0 / R \sin^2 \omega_0 t.$$

Суммарный момент этих сил

$$M = 2Fa/2 = B_0^2 S^2 \omega_0 / R \sin^2 \omega_0 t.$$

Его среднее за период  $T = 2\pi/\omega_0$  значение равно

$$\bar{M} = B_0^2 S^2 \omega_0 / (2R).$$

## Задачник „Кванта“

Поскольку физические процессы, рассмотренные выше, определяются только взаимной ориентацией и относительной угловой скоростью вращения поля и рамки, выражение для раскручивающего рамку момента сил в случае вращающейся вслед за полем с частотой  $\omega$  рамки может быть получено простой заменой  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \omega$ :

$$\bar{M}_p = B_0^2 S^2 (\omega_0 - \omega) / (2R).$$

При  $\omega = 0$ , когда рамка неподвижна, амплитуды индукционного тока и сил Ампера максимальны. При  $\omega = \omega_0$ , когда рамка вращается синхронно с полем, ЭДС индукции, ток и вращающий момент равны нулю, что может быть только в случае отсутствия нагрузки на вал двигателя.

В реальном устройстве, в частности — в нашем вентиляторе, ротор можно представить как совокупность нескольких рамок, однако и в этом случае раскручивающий момент сил будет пропорционален квадрату амплитуды индукции магнитного поля в зазоре статора и разности частот вращения поля и ротора. Максимальная величина индукции магнитного поля  $B_0$  пропорциональна амплитуде  $I$  переменного тока, текущего через обмотки статора, а эта величина, по условию, пропорциональна напряжению  $U$  в сети. Поэтому

$$\bar{M}_p \sim B_0^2 (\omega_0 - \omega) \sim I_0^2 (\omega_0 - \omega) \sim U^2 (\omega_0 - \omega).$$

Переходя от круговых частот к обычным, получим выражение вида

$$\bar{M}_p = \alpha U^2 (v_0 - v),$$

где  $\alpha$  — постоянный коэффициент пропорциональности.

Теперь рассмотрим действие сил, вызывающих торможение ротора, которое в нашем случае обусловлено перегоняемым воздушным потоком. Пусть вентилятор создает струю воздуха площадью  $S$ , движущуюся со скоростью  $v$ . Тогда за малое время  $\Delta t$  в поток вовлекается масса воздуха  $\Delta m = \rho S v \Delta t$ , где  $\rho$  — плотность воздуха. Изменение механической энергии этого воздуха есть

$$\Delta E_k = \Delta m v^2 / 2 = \rho S v^3 \Delta t / 2,$$

а механическая мощность, развиваемая вентилятором, равна

$$N = \Delta E_k / \Delta t = \rho S v^3 / 2.$$

Поскольку (из кинематических соображений) скорость струи пропорциональна частоте вращения лопастей, а мощность связана с моментом сил соотношением  $N = M\omega$ , для тормозящего момента сил, действующих на лопасть вентилятора, получаем

$$M_r \sim \omega^2, \text{ или } M_r = \beta v^2,$$

где  $\beta$  — постоянный коэффициент пропорциональности.

Приравняв раскручивающий и тормозящий моменты сил, действующих на ротор двигателя, получаем уравнение

$$\alpha U^2 (v_0 - v) = \beta v^2, \text{ или } v^2 = k U^2 (v_0 - v),$$

## Задача „Кванта“

где  $k = \alpha/\beta$  — тоже коэффициент пропорциональности. Запишем это уравнение для разных значений  $v$  и  $U$ :

$$\begin{aligned}v_1^2 &= kU_1^2(v_0 - v_1), \\v_2^2 &= kU_2^2(v_0 - v_2),\end{aligned}$$

где  $v_0 = 50$  Гц,  $v_1 = 1800/60$  Гц = 30 Гц,  $U_1 = 220$  В,  $U_2 = 127$  В. Подставив эти значения и исключив  $k$ , получаем уравнение относительно искомой частоты  $v_2$ :

$$v_2^2 + 15v_2 - 750 = 0,$$

откуда

$$v_2 = 21 \text{ Гц.}$$

Таким образом, после подключения к сети через автотрансформатор лопасти вентилятора будут вращаться со скоростью

$$n_2 = 21 \cdot 60 \text{ об/мин} \approx 1260 \text{ об/мин.}$$

О. Фатяков

## ...Итак, задача полностью решена (по письмам читателей)

После публикации решения задачи М1194 («Квант» № 4, 1990, с. 34) в редакцию пришло несколько писем от читателей, в которых доказала гипотеза Е. Гольберга (Ленинград), уточняющая утверждение этой задачи. Напомним, о чем идет речь. Вот формулировка первого (существенного для нас) пункта задачи, составленной А. Азамовым:

**М1194.** а) Из точки  $M$  внутри прямоугольника  $ABCD$  площади  $S$  проводятся биссектрисы  $MF$ ,  $MG$ ,  $MH$ ,  $ME$  треугольников  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$ ,  $DMA$ . Докажите, что для площади  $S_0$  четырехугольника  $EFGH$  выполнены неравенства

$$\frac{3}{8} S < S_0 \leq \frac{1}{2} S.$$

Е. Гольберг доказал, что  $S_0/S = 1 - A/2$ , где

$$A = \frac{a^2}{(a+b)(d+a)} + \frac{b^2}{(b+c)(a+b)} + \frac{c^2}{(c+d)(b+c)} + \frac{d^2}{(d+a)(c+d)},$$

а числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  равны расстояниям от  $M$  до вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  данного прямоугольника, и, пользуясь этим представлением, что  $S_0/S > 0,4$ . Его предположение состояло в том, что точной нижней границей для отношения

$S_0/S$  является  $\sqrt{2} - 1 = 0,41\dots$  — значение, достигаемое в случае, когда  $ABCD$  — квадрат, а  $M$  — одна из его вершин.

Первое доказательство этого предположения мы получили от В. Кыртоаже (Румыния). Применяя равенство  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  (следствие того, что  $ABCD$  — прямоугольник), он вывел изящную формулу  $A = 1 + (a - b + c - d)^2 / (ac + bd)$ . Отсюда с помощью тригонометрической замены  $a = l \sin \alpha$ ,  $b = l \sin \beta$ ,  $c = l \cos \alpha$ ,  $d = l \cos \beta$  (здесь  $l = a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ) он получил оценку  $A \leq (2 + c - 1/c) / (1 + c) \leq 2(2 - \sqrt{2})$ , где  $c = \operatorname{ctg}(|\alpha - \beta|/2)$ , из которой следует нужное неравенство. Читателям предлагается восстановить детали его изобретательных тождественных преобразований.

Десятиклассница 76-й школы Ленинграда И. Егорова выбрала аналитический путь доказательства. Она представила выражение для  $S_0/S$ , аналогичное приведенному выше, как функцию двух переменных:  $x = d/c$  и  $t = b/c$  (вспомним, что  $a^2 = b^2 + d^2 - c^2$ ) и исследовала ее на минимум с помощью производных. Объем заметки не позволяет воспроизвести здесь это довольно кропотливое исследование.

Остановимся подробнее на двух геометрических решениях. Оба они опираются на равенство  $S_0/S = (1 - s/S)/2$ , где  $s$  — площадь прямоугольника  $A_1B_1C_1D_1$  (рис. 1), ограниченного прямыми, проведенными параллельно сторонам  $ABCD$  через основания биссектрис  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  (это равенство приводилось в опубликованном решении задачи). И в обоих решениях показано, что отношение  $s/S$  можно увеличить, если поместить точку  $M$  в вершину прямоугольника, после чего уже совсем несложно доказать, что в этом частном случае оно будет максимальным для квадрата.

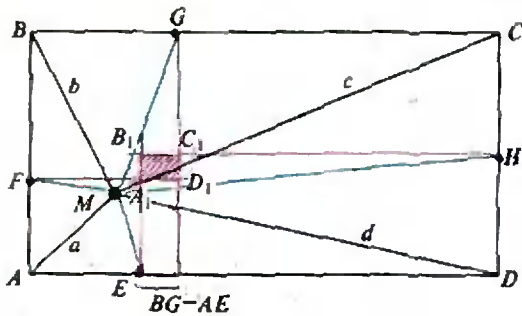


Рис. 1.

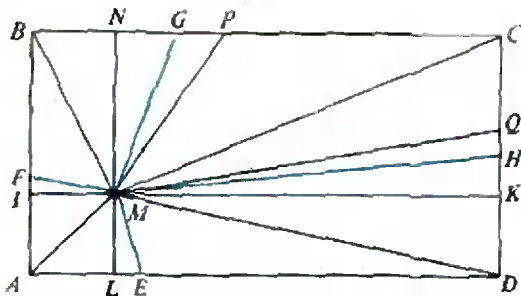


Рис. 2.

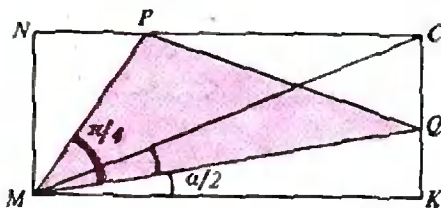


Рис. 3.

Пусть  $I, N, K, L$  — проекции точки  $M$  на стороны прямоугольника  $ABCD$  (рис. 2). Г. Хоцания, ученик 11-го класса школы им. А. Шагиняна (Ереван) показал, что если  $a$  — наименьшее из расстояний  $a, b, c, d$ , то при смещении точки  $M$  сначала в  $I$ , а затем в  $A$ , длина стороны  $A_1B_1$  рассмотренного выше прямоугольника может только увеличиться (докажите), и аналогично, движение  $M$  по пути  $M \rightarrow L \rightarrow A$  увеличивает сторону  $A_1D_1$ . Следовательно, площадь  $s$  для точки  $A$  заведомо больше, чем для точки  $M$ .

**Поправка**

В условии задачи M1258 (см. «Квант» № 12 за 1990 год) в пункте б) допущена неточность. Приводим правильную формулировку.

б) Докажите, что для любого набора из  $n$  чисел на окружности, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из  $n$  неотрицательных чисел.

Срок отправки решения этой задачи продлевается до 15 мая.

Один из постоянных авторов «Задачника «Кванта» А. Михайлов (г. Айзкраукле, Латвия) рассуждал иначе: он изменял не точку, а прямоугольник. А именно, предполагая, что  $a \leq b \leq c \leq d$ , он заменил исходный прямоугольник  $ABCD$  на прямоугольник  $MNCK$  (см. рис. 2), оставив точку  $M$  неизменной. Тогда площади  $S, S_0$  и  $s$  заменяются, соответственно на  $S' = S_{MNCK}, S'_0 = S_{MNPQ}$ , где  $MP$  и  $MQ$  — биссектрисы угла  $NMC$  и  $CMK$  и  $s' = NP \cdot KQ$  (на рисунке 2 прямоугольник площади  $s'$ , соответствующий  $A_1B_1C_1D_1$ , не показан). Мы должны доказать, что  $S_0/S > S'_0/S'$ , т. е. что  $s/S < s'/s'$ . В опубликованном решении задачи было установлено, что  $AE \leq BG$  и  $AF \leq DH$ . Следовательно,  $LF \leq NG, IF \leq KH$ . Отсюда  $NP \geq NG \geq NG - LE = A_1D_1, KQ \geq KH \geq KH - IP = A_1B_1$ , а значит,

$$\frac{s'}{S'} = \frac{NP \cdot KQ}{S_{MNCK}} \geq \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{S_{ABCD}} = \frac{s}{S},$$

что нам и было нужно.

Итак, остается рассмотреть тот частный случай задачи, когда данная точка находится в вершине прямоугольника (рис. 3). Это уже несложно. Приведем выкладки А. Михайлова

$$\begin{aligned} \frac{S'_0}{S'} &= \frac{S_{MNPQ}}{S_{MNCK}} = \frac{MP \cdot MQ \cdot \sin \angle PMQ}{2 \cdot MN \cdot MK} = \\ &= \frac{\sin \pi/4}{2 \cos(\pi/4 - \alpha/2) \cos \alpha/2} = \\ &= \frac{1/\sqrt{2}}{\cos \pi/4 + \cos(\pi/4 - \alpha)} = \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos(\pi/4 - \alpha)} \geq \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1, \end{aligned}$$

где  $\alpha = \angle CMK$ . Равенство достигается только при  $\alpha = \pi/4$ , т. е., когда  $MNCK$  — квадрат.

Несложно доказать, что отношение  $s/S$  для прямоугольника  $ABCD$  и точки  $A$  больше, чем аналогичная величина для вложенного в  $ABCD$  прямоугольника  $MNCK$  и точки  $M$ . Отсюда следует, что для фиксированного прямоугольника минимум  $S_0/S$  достигается, когда точка  $M$  находится в его вершине (что, впрочем, и доказывал Г. Хоцания), и равен, как мы видели,  $1/(1 + \sqrt{2} \cos(\pi/4 - \alpha))$ .

О. М.



# „Квант“ для младших школьников

## Задачи

1. Покажите, что в орнаменте (см. рисунок) площадь фигур, окрашенных в красный цвет, равна площади фигур, окрашенных в синий цвет.

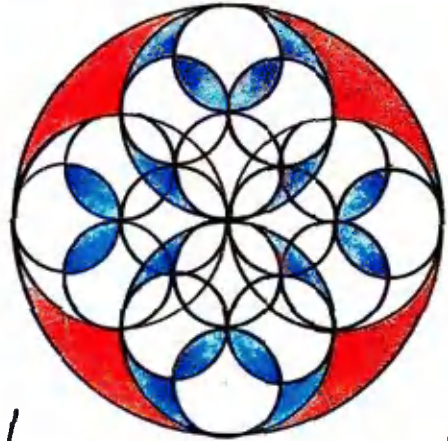
2. На королевских соревнованиях Франции по фехтованию первые четыре места разделили Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян. Сумма мест, занятых Атосом, Портосом и д'Артаньяном, равна 6, сумма мест Портоса и Арамиса тоже равна 6. Какое место занял каждый из мушкетеров, если Портос занял более высокое место, чем Атос?

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (По-азербайджански слова «БИР» и «ДОРД» означают «один» и «четыре».)

4. Коля заплатил 12 копеек за одну тетрадь, два карандаша и резинку. Саша — 27 копеек за две тетради, три карандаша и три резинки. Сколько заплатил Антон за две тетради, пять карандашей и одну резинку?

5. В четырехугольнике  $ABCD$  сумма углов  $ABD$  и  $BDC$  равняется  $180^\circ$ , а стороны  $AD$  и  $BC$  равны (см. рисунок). Докажите, что углы при вершинах  $A$  и  $C$  этого четырехугольника равны.

Эти задачи нам предложили Сун Вей-цы (КНР), ученик 10 класса РФМШ г. Алма-Аты А. Сарсембаев, М. Сафаралиев, В. Вьон, В. Произволов.



Дж. Уокер, скорее всего, знаком нашим читателям как автор великолепной книги «The flying circus of physics» — «Физический фейерверк» в русском переводе (2-е издание было выпущено издательством «Мир» в 1989 году).

В этом номере мы предлагаем статью Дж. Уокера из книги D. Halliday, R. Resnick «Fundamentals of Physics», Third edition extended, 1988 (John Wiley & Sons, N. Y.). Перевод О. Симоновой.

## ДВИЖЕНИЕ В ЧАС ПИК

Дж. УОКЕР



Светофоры в небольшом городке обычно не требуют особо строгого регулирования. Транспортный поток через систему светофоров может быть случайным, но очереди при красном свете редко бывают длинными. А вот в большом городе, особенно в часы пик, тщательная регулировка необходима. Без нее «хвосты» машин вытягиваются и блокируют перекрестки, создавая то, что называют пробкой, и для освобождения машин из плена могут потребоваться часы.

Предположим, что вы должны спроектировать систему светофоров для улицы с односторонним движением, состоящей из нескольких полос. Каждый светофор дает зеленый свет в течение 50 секунд, желтый — 5 секунд и красный — 25 секунд (типичный светофор для городского участка с плотным движением). У вас может возникнуть искушение увеличить время горения зеленого сигнала и уменьшить время красного, чтобы «поддерживать» поток движущегося транспорта. Однако надо помнить, что движение на перпендикулярных улицах нельзя сдерживать слишком долго, иначе там образуются длинные очереди.

Как же рассчитать время включения зеленых сигналов на перекрестках? Ясно, что если вы будете включать все зеленые сигналы одновременно, то движение будет возможно только 50 секунд. При каждом включении зеленого света потоки машин будут двигаться по улице, пока все светофоры не переключатся на красный. Чтобы проехать как можно большее расстояние, у водителей возникает искушение гнать машины. Большие потоки машин, мчащиеся со скоростью, скажем, 55 миль в час ( $\approx 90$  км/ч) по улицам плотно населенного города, будут напоминать автомобильные гонки и явно будут опасны.

Лучше и безопаснее проект, в котором светофор на каждом перекрестке не переключается на зеленый свет, пока не приблизятся передние машины группы от предыдущего перекрестка. Предположим, например, что группа машин находилась на пере-

крестке I и движется к перекрестку II. Через какое время после включения зеленого сигнала на перекрестке I должен быть включен зеленый свет на перекрестке II? Пусть  $d$  — расстояние между двумя перекрестками и  $v_r$  — скорость, которую, по вашему мнению, должна иметь группа машин (возможно, предел скорости). Требуемая временная задержка включения зеленого света на перекрестке II равна  $d/v_r$ . Если расстояние между перекрестками одинаково, задержка зеленого сигнала от одного перекрестка до другого всегда равна  $d/v_r$ , и водители, двигающиеся со скоростью  $v_r$ , проедут через всю систему светофоров без остановок. Схема работает так хорошо, если расстояние между перекрестками различно. Вы просто учитываете нужные значения  $d$ , чтобы определить временную задержку для зеленого сигнала на данном перекрестке. Гнать машину со скоростью, большей  $v_r$ , через такую систему светофоров бесполезно, так как придется останавливаться на красный свет.

Схему несколько меняют два фактора. Лидер группы должен видеть включение зеленого сигнала до того, как он подъедет к перекрестку, иначе он притормозит, боясь проехать на красный свет. Учитывая этот фактор, вы должны уменьшить временную задержку включения зеленого сигнала на несколько секунд. Однако, если бы группа машин остановилась на несколько секунд на красный свет на перекрестке I, передней машине потребовалось бы несколько дополнительных секунд, чтобы отреагировать на включение там зеленого сигнала и набрать скорость. Таким образом, передняя машина не все расстояние между перекрестками движется со скоростью  $v_r$ . Этот фактор требует увеличения времени задержки включения зеленого сигнала на несколько секунд. В некоторых случаях эти два фактора могут компенсировать друг друга.

Все это показано на рисунке 1. Слева изображена система светофоров, справа — графики путей, проходимых машинами из группы, стоящей в момент времени  $t=0$  перед перекрест-

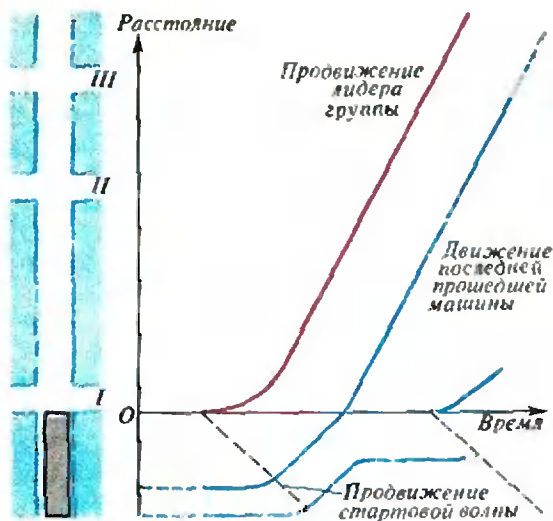


Рис. 1. Графическое изображение того, как группа машин, остановившаяся на перекрестке I, движется через систему светофоров.

ком I. Изогнутые участки графиков соответствуют ускорению и замедлению движения машин при переключении светофоров. Заметьте, что светофор на перекрестке II дает зеленый свет за несколько секунд до того, как к нему подъедет машина-лидер.

Но и с системой светофоров, работающих с задержкой, движение может застопориться. Проблема заключается в том, что, если группа остановилась, а потом при включении зеленого света начала двигаться, автомобили набирают скорость не одновременно, а в порядке очереди. По всей группе машин от лидера идет стартовая волна. (Вы можете измерить скорость стартовой волны, расположившись около остановившейся группы машин. Определите длину группы, умножив число машин на приблизительное среднее расстояние между передними бамперами. Затем измерьте время от включения зеленого сигнала до начала движения последней машины. Скорость стартовой волны — это длина группы, деленная на измеренное время. Обычно она равна 5 м/с (11 миль в час.) Так что по сравнению с лидером последнему автомобилю приходится не только проехать большее расстояние до перекрестка II, но еще и ждать, пока до него дойдет

стартовая волна. Таким образом, при длинном «хвосте» перед светофором последней машине всегда потребуется гораздо больше времени, чтобы доехать до следующего перекрестка.

Если конец группы не успевает проехать на зеленый свет с остальными машинами (именно такую ситуацию иллюстрирует рисунок 1), последующие группы могут начать удлиняться. Рассмотрим случай, когда на перекрестке II остается хвостовая часть машин, как показано на рисунке 2. Назовем эту часть A. В то время как A ждет при красном свете, группа B на перекрестке I получает зеленый сигнал и начинает двигаться (ситуация 2, 3). Если светофор на перекрестке II отрегулирован на лидера группы B (т. е. с учетом того, что его средняя скорость меньше  $v_c$ ), зеленый свет на перекрестке II задерживается, и передние машины группы B подъезжают к «хвосту» группы A до того, как первые автомобили A тронутся с места. Все осложняется еще и тем, что последние машины группы A должны ждать, пока до них дойдет стартовая волна.

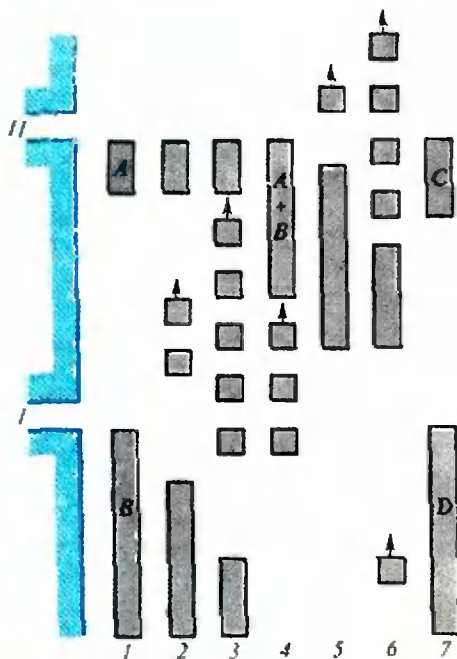


Рис. 2. При задержке зеленого света на перекрестке II группа остановленных машин может увеличиться ( $C+D$  больше  $A+B$ ).

В результате  $A$  и  $B$  объединяются, образуя на перекрестке II новую группу. Она может оказаться слишком длинной, чтобы успеть полностью пройти перекресток II. Пусть  $C$  — хвостовая часть группы, остановленная следующим красным сигналом светофора на перекрестке II (ситуация 7 на рисунке 2). Если  $C$  длиннее  $A$ , ситуация ухудшается. Пока  $C$  пережидает красный свет, от перекрестка I подходит следующая группа (назовем ее  $D$ ). Тогда объединенная из  $C$  и  $D$  группа может быть длиннее предыдущего объединения  $A$  и  $B$ , и в результате следующая хвостовая часть, оставленная на перекрестке II, будет длиннее  $C$ .

Если при каждом переключении сигналов новый «хвост», оставленный на перекрестке II, будет длиннее предыдущего, ситуация быстро может стать безнадежной. В конце концов «хвост» становится таким длинным, что тянется до перекрестка I. Предположим, что на этом перекрестке перед красным светофором I стоит группа машин. Получив зеленый свет, они выезжают на перекресток I. Так как эти машины не могут двигаться, пока до них не дойдет стартовая волна от перекрестка II, они находятся на том же месте, когда на перекрестке I загорается красный свет. Водители на перпендикулярной улице не могут проехать на зеленый сигнал своего светофора — перекресток I блокирован. Очереди на боковых улицах удлиняются, блокируются другие перекрестки. Затор быстро распространяется, пока весь район не превратится в одну большую стоянку.

Пробка может образоваться даже при хорошей системе светофоров. Однажды я попал в пробку в Кливленде, когда в дневные часы пик внезапно начался сильный снегопад. Поскольку улица, по которой я ехал, была скользкой, машины-лидеры группы ехали медленно. Стартовые волны также двигались медленнее обычного. Примерно за 20 минут «хвосты» вытянулись почти до предыдущих перекрестков, блокируя их. На 2 мили по моему маршруту и по пяти парал-

лельным артериям движение почти остановилось. Я чуть-чуть продвигался только потому, что машины на внешнем конце маршрута постепенно выезжали в пригород. Как только они отделялись от группы, стартовая волна начинала степенно двигаться по двухмильному отряду и давала мне возможность продвинуться на несколько автомобильных корпусов вперед. Для поездки, которая обычно занимала пять минут, потребовалось более двух часов!

Ситуацию с пробкой, вызванной внезапным снегопадом, бывает невозможно облегчить. Однако пробки, вызываемой неожиданно длинными группами машин, можно избежать, если инженер или компьютер вмешается в нормальную последовательность смены сигналов. Допустим, что через систему дистанционных датчиков вы обнаруживаете постепенное накопление автомобилей, скажем, на перекрестке II. Пусть  $A$  — задержанная там группа машин в момент нашего вмешательства, а  $B$  — группа машин, оставленная на перекрестке I. В зависимости от того, какова длина  $A$ , си-

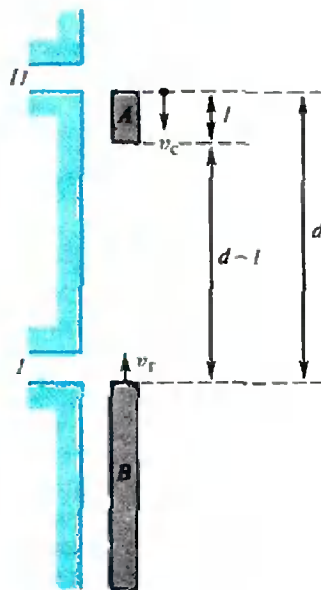


Рис. 3. Факторы, важные для определения относительных моментов включения зеленого света на соседних перекрестках I и II.

туацию можно «разрядить» двумя путями. Можно на обоих перекрестках одновременно дать зеленый свет; но при достаточно длинном «хвосте»  $A$  этот путь может и не сработать. Можно включить зеленый светофор на перекрестке II раньше, чем на перекрестке I. Какой путь выбрать? Это зависит от соотношения длины  $l$  «хвоста»  $A$  и расстояния  $d$  между перекрестками.

Если передние машины  $B$  движутся к «хвосту»  $A$  с постоянной скоростью  $v_r$ , для прохождения этого отрезка им требуется время  $(d-l)/v_r$  (см. рис. 3). Между тем стартовая волна движется вдоль  $A$  со скоростью  $v_c$ , и для достижения тыла  $A$  ей требуется время  $l/v_c$ . Чтобы авангард группы  $B$  достиг тыла  $A$  в момент, когда те машины начинают двигаться, время между включениями зеленого сигнала светофора на перекрестках I и II должно быть

$$t = \frac{d-l}{v_r} - \frac{l}{v_c} = \frac{1}{v_r} \left( d - l \left( 1 + \frac{v_r}{v_c} \right) \right).$$

Если

$$\frac{l}{d} = \frac{v_c}{v_c + v_r},$$

то  $t=0$  — это значит, что при таком соотношении между  $l$  и  $d$  перекрестки I и II следует «открывать» одновременно. При

$$l > d \frac{v_c}{v_c + v_r}$$

время  $t$  оказывается отрицательным, т. е. светофор II должен переключаться на зеленый свет на время  $t$  раньше, чем светофор I. Если же

$$l < d \frac{v_c}{v_c + v_r},$$

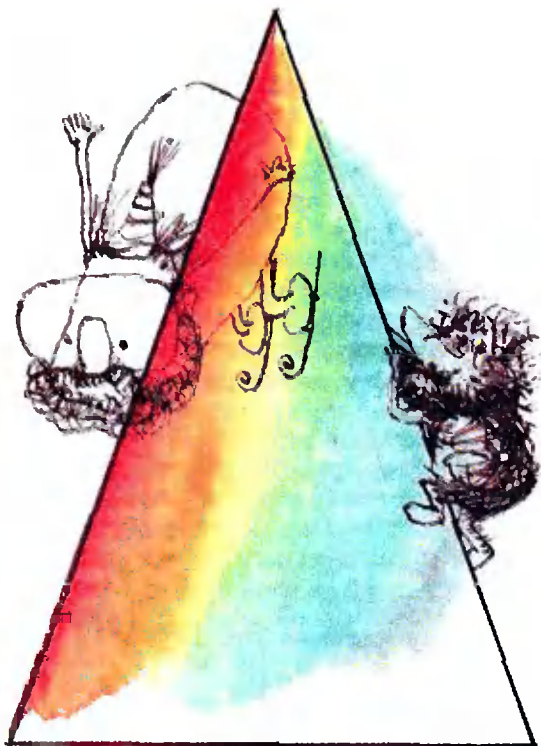
то первым включается зеленый свет на перекрестке I. При типичных значениях скорости движения 10 м/с (22 мили в час) и скорости стартовой волны 5 м/с одновременное включение зеленого света необходимо при  $l/d=1/3$ . Если  $l/d > 1/3$ , зеленый сигнал на перекрестке II следует включать раньше, чем на перекрестке I.

Можно сказать, что мы нашли скорость, с которой движется по улице

«волна» включения зеленых сигналов. Если  $l/d < 1/3$ , эта волна движется в направлении движения машин и с такой же, как у них, скоростью. При  $l/d=1/3$  зеленый свет включается одновременно на всех перекрестках. Если  $l/d > 1/3$ , «зеленая волна» движется в направлении, противоположном движению машин.

Этот результат — только приближительная оценка, так как в вычислениях игнорируется три факта. Передние машины группы  $B$  начинают движение, набирая скорость после остановки. Их водители должны видеть, что «хвост»  $A$  начал двигаться, заранее, до того, как они приблизятся к нему, иначе они снизят скорость или остановятся из предосторожности. Последние машины  $A$ , разумеется, должны набрать скорость до подхода машин  $B$ . Надеюсь, вы получите удовольствие от точного расчета с учетом этих дополнительных факторов.

Как бы вы спроектировали систему светофоров для оптимизации транспортных потоков на ул. це с двухсторонним движением? Есть ли способ предотвратить остановки машин на такой улице? Можете ли вы смоделировать на компьютере движение групп машин через систему светофоров? Если да, то вы сможете исследовать проблему пробок, не попадая в них.



Школа «Кванте»

## Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «О двух мерах взаимодействия» предназначена девятиклассникам, заметка «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — десятиклассникам, «О чем рассказал спектр атома водорода» — одиннадцатиклассникам.

Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

### О двух мерах взаимодействия

Известно, что движение тела изменяется при действии на него других тел. Характеристикой, или, как говорят, мерой взаимодействия является сила. Она и входит в уравнение движения, выражающее второй закон Ньютона. Чем интенсивнее взаимодействие тел, тем больше его результат — ускорения каждого из них.

Но сила — не единственная мера взаимодействия. Есть и другая, не менее важная его характеристика. Это потенциальная энергия взаимодействия. Сила и потенциальная энергия как будто бы мало похожи одна на другую. Одно различие между ними сразу бросается в глаза: сила — величина векторная, потенциальная энергия — скалярная. Тем не менее между двумя этими величинами, характеризующими одно и то же взаимодействие, должна существовать и действительно существует связь. О ней и пойдет речь в этой заметке.

**Гравитационное взаимодействие.** Пусть тело массой  $m$  движется вниз по гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Направим координатную ось  $X$  вдоль плоскости, как это показано на рисунке 1, и рассмотрим движение тела на участке между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

На тело действуют сила тяжести и сила реакции опоры, но проекция последней на ось  $X$  равна нулю, так что она нас не будет интересовать. Проекция же силы  $\vec{F} = m\vec{g}$  на ось  $X$  равна

$$F_x = -mg \sin \alpha. \quad (1)$$

Потенциальная энергия тела (точнее, системы «тело — Земля») в начальной точке равна  $mgh_1$ , а в конечной она равна  $mgh_2$ , где  $h_1$  и  $h_2$  — высоты, отсчитываемые от некоторого условно выбранного нулевого уровня. Таким образом, при переме-

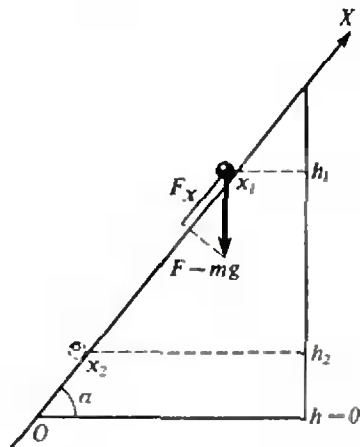


Рис. 1.

щении тела из первого положения во второе потенциальная энергия  $E_p$  изменилась на величину

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1 = -mg(h_1 - h_2).$$

Координата  $x$  тела при этом изменилась на величину

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2).$$

Из рисунка 1

$$\frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} = \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\Delta E_p = -mg(x_1 - x_2) \sin \alpha = mg \Delta x \sin \alpha. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (2) и (1), получаем

$$F_x = - \frac{\Delta E_p}{\Delta x}.$$

Это значит, что проекция вектора силы  $\vec{F}$  на ось  $X$  равна взятому с противоположным знаком изменению потенциальной энергии, приходящемуся на единицу перемещения вдоль оси  $X$ . Крутая наклонная плоскость отличается от пологой тем, что на каждую единицу пути вдоль нее приходится большее изменение потенциальной энергии, чем вдоль пологой. По крутому склону горы труднее взбираться потому, что каждый шаг по нему связан с большим изменением потенциальной энергии, чем на пологом склоне.

Читатель сам легко сможет убедиться в том, что для проекции вектора силы на ось  $Y$  получается аналогичная формула:  $F_y = - \frac{\Delta E_p}{\Delta y}$ . А если при движении тела изменяется и координата  $z$  (тело движется не по плоскости, а в пространстве), то и для проекции  $F_z$  можно получить подобную же формулу:  $F_z = - \frac{\Delta E_p}{\Delta z}$ .

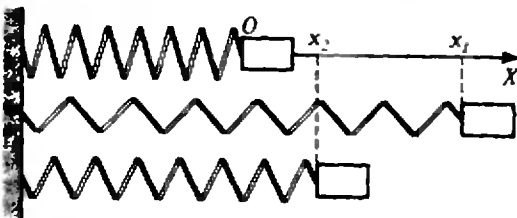


Рис. 2

**Упругое взаимодействие.** Рассмотрим теперь случай, когда тело движется под действием силы упругости, например, пружины. В верхней части рисунка 2 показана недеформированная пружина с прикрепленным к ней телом. Направим координатную ось  $X$  вдоль оси пружины, а начало координат свяжем с правым концом недеформированной пружины.

Пусть теперь пружина растянута так, что координата ее конца стала  $x_1$ . На тело действует сила упругости, равная  $-kx_1$ . Допустим, что под действием этой силы тело передвинулось в положение  $x_2$ , где сила упругости стала равной  $-kx_2$ . Но мы будем считать, что на тело всюду действует постоянная сила, равная среднему значению  $-k \frac{x_1 + x_2}{2}$ , так что проекция силы на ось  $X$  равна

$$F_x = -k \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

А какова потенциальная энергия? В начальном положении она равна  $kx_1^2/2$ , а в конечном  $-kx_2^2/2$ . Значит, изменение потенциальной энергии

$$\Delta F_p = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = - \frac{k}{2} (x_1 + x_2)(x_1 - x_2). \quad (4)$$

Сравнивая равенства (4) и (3), находим, как и в случае силы тяжести,

$$F_x = \frac{\Delta E_p}{x_1 - x_2} = - \frac{\Delta E_p}{\Delta x}.$$

И здесь изменение потенциальной энергии на единицу перемещения вдоль координатной оси равно проекции силы на эту ось. «Сильная» пружина (с большой жесткостью  $k$ )

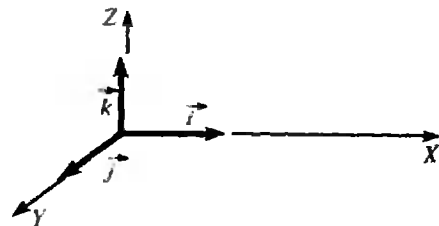


Рис. 3.



отличается от «слабой» (с малой жесткостью) тем, что на единицу длины перемещения приходится большее изменение потенциальной энергии. «Сильная» пружина подобно крутому склону, «слабая» — склону пологому.

Новое слово — градиент. В формулах  $F_x = -\Delta E_p / \Delta x$ ,  $F_y = -\Delta E_p / \Delta y$  и  $F_z = -\Delta E_p / \Delta z$  слева стоят проекции вектора силы  $\vec{F}$ . Отсюда следует, что и величины  $\Delta E_p / \Delta x$ ,  $\Delta E_p / \Delta y$  и  $\Delta E_p / \Delta z$  тоже должны быть проекциями какого-то вектора, хотя потенциальная энергия  $E_p$  — величина скалярная. Что это за вектор?

Проведем следующую чисто математическую операцию. Направим мысленно вдоль трех осей координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  три вектора, по модулю равных единице (их так и называют единичными векторами); обозначим их  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  (рис. 3). Умножив проекции вектора  $\vec{F}$  на соответствующие единичные векторы, получим три векторные величины —  $F_x \vec{i}$ ,  $F_y \vec{j}$  и  $F_z \vec{k}$ , их называют *составляющими* вектора  $\vec{F}$  по осям координат. Вектор  $\vec{F}$  выражается через свои составляющие так:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Но можно написать и так:

$$\vec{F} = - \left( \frac{\Delta E_p}{\Delta x} \vec{i} + \frac{\Delta E_p}{\Delta y} \vec{j} + \frac{\Delta E_p}{\Delta z} \vec{k} \right).$$

Величина, стоящая в скобках в правой части равенства, — это вектор. Называется он градиентом потенциальной энергии и обозначается символом  $\text{grad}$ , так что

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p. \quad (5)$$

В этом и состоит связь между двумя мерами взаимодействия — силой и потенциальной энергией: *сила равна взятому с противоположным знаком градиенту потенциальной энергии.*

Как направлен этот странный вектор? Из формулы (5) видно, что направлен он в сторону увеличения потенциальной энергии. Если, например, речь идет о силе тяжести, то потенциальная энергия растет по мере подъема тела. Туда, по вертикали вверх, и направлен вектор  $\text{grad } E_p$ .

Можно, конечно, сказать и иначе: сила тяжести направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии. В общем случае вектор градиента потенциальной энергии всегда указывает направление наиболее интенсивного изменения этой величины.

Итак... Мы нашли связь между двумя мерами взаимодействия для тех случаев, когда оно проявляется в виде тяготения и упругости. Но существует и такое механическое взаимодействие, которое проявляется в виде трения. Для него единственная мера, единственная характеристика — сила (сила трения). С этой силой потенциальная энергия не связана, потому что сила трения не зависит от координат, в то время как потенциальная энергия — функция координат.

Таким образом, в механике используются обе меры взаимодействия — сила и потенциальная энергия, но сила пригодна во всех случаях, а потенциальная энергия — нет.

Заметим в заключение, что в квантовой механике, описывающей явления микромира, мерой взаимодействия служит исключительно потенциальная энергия. Силы в уравнения квантовой механики не входят.

А. Кикоин

## О ледниках, скороварках и теореме Карно

Если спросить у школьника, почему в морозный день коньки хорошо скользят по льду, то скорее всего можно услышать простой и очевидный ответ: «Конек трется о лед, между ними образуется тонкая водяная смазка, она и обеспечивает скольжение». Однако школьнику, более искусственному в физике, такой ответ покажется слишком простым и потому неинтересным. «Нет, — скажет он, — дело здесь не в трении, а в давлении конька на лед. При повышении давления температура плавления льда становится меньше  $0^\circ\text{C}$ , а лед под коньком тает.» Что же, в принципе и такой

(Окончание см. на с. 42)

## Кассидоскот "Классика"



## Многочлены

В ряду важнейших математических понятий одно из первых мест занимают многочлены. Многочленом от одной переменной, как известно, называется функция вида  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Число  $n$  называется степенью многочлена. Если рассмотреть совокупность всех многочленов, то их свойства полностью аналогичны свойствам целых чисел. Действительно, сумма, разность и произведение многочленов всегда являются многочленами. При этом выполняются коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы. Отношение двух многочленов уже не всегда будет многочленом, и для них, как и для чисел,

имеет место «деление с остатком», т. е. для любых двух многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$ , где  $n \geq m$ , существует многочлен  $D_{n-m}(x)$  степени  $n-m$  — частное и многочлен  $R_k(x)$  степени  $k < m$  — остаток, для которых выполняется равенство  $P_n(x) = Q_m(x) \times D_{n-m}(x) + R_k(x)$ . В том случае, когда  $Q(x) = x - a$ , остаток  $R_k(x)$  будет иметь нулевую степень, т. е. будет числом. В конце XVIII века французский математик Э. Безу (1730—1783) обнаружил, что этот остаток равняется  $P(a)$ .

Аналогию многочленов с целыми числами можно было бы продолжить. Но многочлены имеют более сложную структуру, чем целые числа. Одной из важнейших ха-

рактеристик многочлена является набор чисел  $x$ , для которых он обращается в нуль, — корни многочлена. Корни многочленов первой степени умели находить еще писцы Древнего Египта и Древнего Вавилона. Вавилоняне умели находить и корни многочленов второй степени, т. е. умели решать квадратные уравнения.

Находить корни многочленов третьей степени, т. е. решать кубические уравнения, люди научились лишь в XVI веке. История открытия формулы корней кубического уравнения — одна из самых ярких и драматических страниц в истории математики. Нетрудно показать, что простой заменой переменной любое кубическое уравнение можно привести к виду  $x^3 + px = q$ . Для случая положительных  $p$  и  $q$  эту задачу решил Ш. Ферро (1465—1526). Однако в то время отрицательные числа еще не вошли в обиход математиков, и ему предстояло научиться решать уравнения  $x^3 + q = px$ ,  $x^3 + px + q = 0$  и  $x^3 = px + q$ .

Ш. Ферро сообщил свой метод зятю и ученику А. Фиоре, и тот вызвал на математический турнир по решению уравнений третьей степени замечательного итальянского математика Никколо Тарталья (1499—1557). За несколько дней до начала турнира Тарталья нашел общий метод решения кубических уравнений и во время соревнования за два часа решил все 30 предложенных ему задач, его соперник не смог решить ни одной из

30 задач, предложенных ему Тартальей.

Найденная Тартальей формула решения уравнения  $x^3 + px + q = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

получила название «формулы Кардано» в честь другого итальянского математика Дж. Кардано (1501—1576), который узнал ее от Н. Тартальи и, вопреки договоренности, опубликовал в своей книге. Вскоре один из учеников Дж. Кардано Л. Феррари (1522—1565) нашел формулу для решения уравнений четвертой степени.

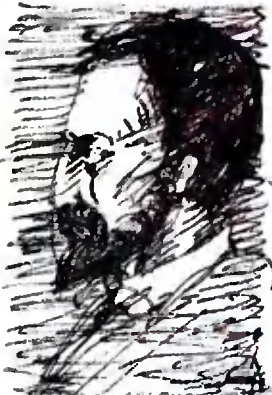
И лишь еще через два века в работах выдающихся математиков Ж. Лагранжа (1736—1813), П. Руффини (1765—1822) и Н. Абеля (1802—1829) было показано, что нет общей формулы для нахождения корней уравнений пятой и более высоких степеней. А в работах Э. Гауэ (1811—1832) был найден метод, с помощью которого для любого многочлена можно определить, выражаются ли его корни через радикалы.

Дальнейшее развитие теории многочленов связано с введением в математику комплексных чисел. В 1799 году выдающийся немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) доказал теорему, которая по праву называется «основной теоремой алгебры»: *всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень (вещественный или комплекс-*

сний). Отсюда и из теоремы Безу следует, что уравнение  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней (среди них могут быть и кратные).

Еще в XVI веке французский математик Ф. Виет (1540—1603) обнаружил соотношения между корнями многочлена  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  и его коэффициентами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= a_2, \\ x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$



Эти соотношения, называемые формулами Виета, верны и в том случае, если некоторые (или все) корни являются комплексными числами. Формулу Виета для квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  вы знаете:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1x_2 &= q. \end{aligned}$$

Многочлены — это самые простые и наиболее изученные функции в математи-

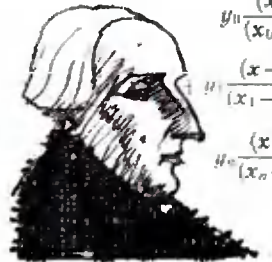
ке. Их легко дифференцировать и интегрировать, проследить ход их поведения. Очень часто в поисках закономерности, связывающей значения неизвестной функции от некоторого аргумента, предполагают, что такой функцией является многочлен. Этому способствует то обстоя-



тельство, что соответствующий многочлен всегда можно написать. Его в свое время предложил И. Ньютон (1643—1727), и он получил название «интерполяционный многочлен Ньютона». В заданных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  этот многочлен принимает заданные значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

Вот этот многочлен

$$\begin{aligned} y_0 &\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ y_1 &\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ y_n &\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned}$$



Не трудно заметить, что степень этого многочлена равна  $n$ .

членов, для которых значение функции отличается от значения многочлена в каждой точке не более чем на заданное число, например на 0,001, занимались выдающиеся математики, в частности К. Вейерштрассе (1815—1897) и П. Л. Чебышев (1821—1894). Широко известны «многочлены Чебышева». Это многочлены вида  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , значения которых наименее отклоняются от нуля (обратите внимание, что коэффициент при  $x^n$  равен 1). Чебышев доказал, что такими многочленами являются многочлены

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \\ &= \frac{1}{2} \cos(n \arccos x). \end{aligned}$$

В математике рассматриваются также многочлены от нескольких перемен-



Если мы хотим исследовать некоторую функцию  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ , то ее очень полезно приблизить многочленом

$$\begin{aligned} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

предложенным английским математиком Б. Тейлором (1685—1731).

Вопросами приближения функции, заданной на отрезке, при помощи много-

ных. Так, многочлены первой степени от двух переменных описываются выражением  $ax + by + c$ , а многочлены второй степени от двух переменных — выражением  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ . Если приравнять это выражение к нулю, то получим уравнение кривой второго порядка. К их числу относятся окружность, эллипс, гиперболы и парабола.

ответ имеет право на существование — температура плавления льда действительно понижается при увеличении внешнего давления. Но физика — наука количественная, и поэтому, чтобы выяснить, имеет ли это физическое явление какое-нибудь отношение к катанию на коньках, необходимо сделать численные оценки.

Прежде всего обсудим, что такое температура плавления (или точка таяния) льда, чем она интересна. Как известно, при достижении этой температуры лед перестает нагреваться, и поглощаемое им тепло целиком идет на таяние льда. Если же тепло перестанет поступать, оставшийся лед и вода будут находиться в тепловом равновесии. Таким образом, температура плавления — это температура равновесия между водой и льдом при данном давлении. Так, при давлении 1 атм она равна  $0^\circ\text{C}$ . А на сколько изменится эта температура при увеличении давления до 1,01 атм?

Оказывается, рассчитать смещение точки плавления льда нам поможет... теорема Карно. Да, да, та самая теорема, в которой идет речь о максимальном КПД тепловых машин. «При чем же здесь точка плавления льда?» — спросите вы. Дело в том, что Карно доказал теорему о максимальном КПД циклической тепловой машины любого типа, независимо от того, что в нее заложено в качестве рабочего тела: идеальный газ, тающий лед или мыльная пленка. Необходимо соблюсти лишь одно условие: машина должна получать тепло только при температуре  $T_1$ , а отдавать — только при температуре  $T_2$  (на промежуточных этапах теплообмен не должен происходить). Максимальный КПД такой машины (ее называют идеальной машиной Карно) реализуется при медленном, обратимом режиме ее работы и, независимо от рабочего вещества машины, равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

где  $A$  — работа машины за цикл,  $Q_1$  — количество теплоты, полученное машиной от нагревателя.

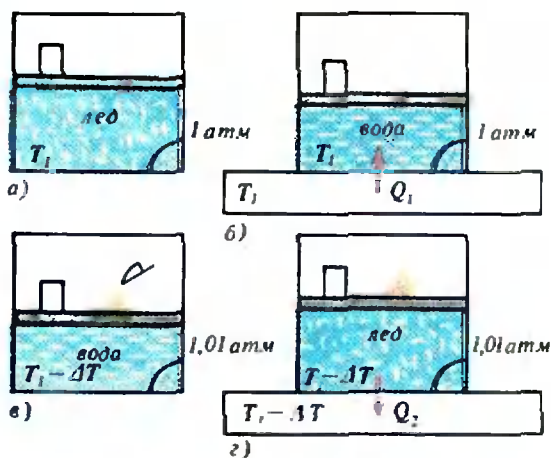


Рис. 1.

Давайте представим нашу воображаемую машину Карно в виде цилиндра с поршнем (рис. 1, а). Заложим в нее лед массой  $m$  под давлением  $p_1 = 1$  атм при температуре  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  ( $T_1 = 273$  К). Постоянное давление будем обеспечивать грузом, лежащим на поршне. Чтобы подчеркнуть, что вода и лед находятся в равновесии, в уголке сосуда мы изобразили небольшое количество воды.

Опишем по этапам, как будет происходить один цикл в нашей машине Карно.

1) Поставим цилиндр на нагреватель (термостат), имеющий температуру  $T_1$ , и передадим системе количество теплоты  $Q_1 = \lambda m$ , необходимое для плавления всего льда ( $\lambda$  — удельная теплота плавления). При этом поршень с грузом немного опустится (рис. 1, б), так как объем льда  $V_{\text{л}} = m/\rho_{\text{л}}$  больше, чем объем воды  $V_{\text{в}} = m/\rho_{\text{в}}$ . На графике в координатах  $p, V$  (рис. 2) этому процессу соответствует линия 1—2.

2) Снимем сосуд с термостата и теплоизолируем его (рис. 1, в), после чего будем медленно увеличивать давление до тех пор, пока оно не станет равным  $p_1 + \Delta p = 1,01$  атм (для этого будем потихоньку подсыпать на поршень песок). При этом температура системы понизится до значения  $T_2 = T_1 - \Delta T$ , равного температуре плавления льда при давлении 1,01 атм.

3) Поставим сосуд на термостат с температурой  $T_2$  и будем отбирать

тепло до тех пор, пока вся вода снова не замерзнет (рис. 1, з). На графике (см. рис. 2) этому процессу соответствует линия 3—4.

4) Осталось только теплоизолировать сосуд и медленно снять с поршня весь песок — и мы вернемся к начальному состоянию.

Теперь проведем расчеты. Работу за цикл легко найти из графика в координатах  $p, V$  — она равна площади фигуры, ограниченной графиком:

$$A = \Delta p(V_1 - V_2) = \Delta p \left( \frac{m}{\rho_л} - \frac{m}{\rho_в} \right).$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно

$$Q_1 = \lambda m.$$

Поэтому из теоремы Карно (1) получаем

$$\Delta p \left( \frac{m}{\rho_л} - \frac{m}{\rho_в} \right) / (\lambda m) = \Delta T / T_1,$$

или, для любой температуры  $T_1 = T$ ,

$$\Delta T = \Delta p \frac{T}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в} \right). \quad (2)$$

Это соотношение называют уравнением Клапейрона — Клаузиуса. Подставив в него численные значения, получим, что при  $\Delta p = 0,01$  атм  $\Delta T = 9,2 \cdot 10^{-5}$  К. Видно, что эффект очень слабый. Для изменения температуры плавления на 1 К, например, придется создать давление  $\approx 133$  атм. Вернемся, однако, к нашим конькам.

Давление человека в коньках можно оценить как  $p = mg/S \approx 600 \text{ Н} / 2 \text{ см}^2 = 30$  атм. Тогда смещение точки плавления под коньками составит  $\approx 0,3$  К, что, конечно, очень мало в морозный день. Так что прав оказался «наивный» школьник: смазка образуется в первую очередь за счет трения. А какова же в таком случае роль коньков? Ведь они все-таки нужны! Не обсуждая подробно «физику катания», отметим один очевидный факт: для смазки поверхности конька, площадь которой мала, нужно растопить гораздо меньше льда, чем для смазки подошвы ботинка.

Встречаются ли в окружающей нас действительности такие давления, при

которых происходит заметное смещение точки плавления льда? Безусловно, встречаются. Приведем лишь один пример — преодоление препятствий сползающим по склону тяжелым ледником. В том месте, где ледник упирается в кусок скалы или камень, создается очень большое давление, и лед начинает подтаивать. Ледник как бы оплывает камень в своем движении, пропуская его сквозь себя. После «снятия» давления вода на леднике снова замерзает.

«Это, конечно, интересно, но уж очень экзотично, — скажете вы. — Неужели это все, чего мы достигли?» Нет, конечно. Посмотрим внимательно на наш результат. Мы научились вычислять, как меняется температура равновесия двух фаз — жидкость (вода) и твердое тело (лед) — при изменении внешнего давления. Самое замечательное то, что вместо этих фаз можно взять любые другие, лишь бы они находились в тепловом равновесии друг с другом. Например, жидкость — пар, металл — расплав, твердое тело — пар и т. д. Другими словами, уравнение Клапейрона — Клаузиуса справедливо не только для плавления, но и для любого другого процесса перехода вещества из одной фазы в другую (испарение, сублимация и пр.). В формулу (2) тогда войдут плотность вещества в этих фазах и соответствующая удельная теплота фазового превращения.

В качестве примера рассмотрим переход вода — пар.

Как вы знаете, пар, находящийся в равновесии с водой, называют насыщенным. Зависимость между температурой насыщенного пара и его давлением используется для расчета влажности воздуха, определения точ-

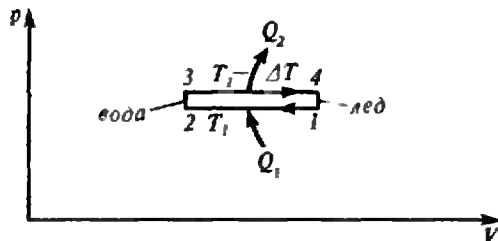


Рис. 2.

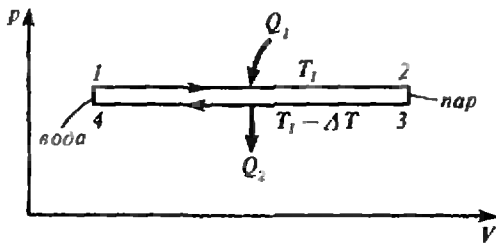


Рис. 3.

ки росы и т. д. Кроме всего прочего, температура насыщенного пара (температура равновесия вода — пар) определяет точку кипения воды при данном внешнем давлении. Так, при давлении 1 атм температура кипения равна 100 °С (373 К). С другой стороны, хорошо известно, что давление насыщенного пара растет при увеличении температуры. На этом свойстве — росте температуры кипения с давлением основан, в частности, принцип работы скороварки, где продукты готовятся при большем давлении и большей температуре.

В чем же различие между процессами таяния льда и испарения воды? Почему в одном случае температура равновесия фаз с ростом давления уменьшается, а в другом увеличивается? Дело вот в чем. Когда лед поглощает тепло и плавится, объем системы уменьшается (плотность воды больше плотности льда), а когда вода поглощает тепло и испаряется, объем системы увеличивается (плотность насыщенного пара меньше плотности воды). Однако график цикла в координатах  $p, V$  и в том, и в другом случае должен идти по часовой стрелке — иначе работа машины за цикл будет отрицательной. Сравните ход обоих графиков (см. рис. 2 и 3) и вы поймете, почему в одном случае большему давлению соответствует меньшая температура, а в другом — наоборот. Попробуйте, кроме того, продумать последовательность действий, которые надо совершить с сосудом, содержащим воду и пар, чтобы получился изображенный на графике цикл Карно.

Мы же завершим наш рассказ численной оценкой смещения точки

кипения при увеличении давления от 1 атм до 1,01 атм. Для этого в формуле (2) заменим удельную теплоту плавления льда на удельную теплоту парообразования воды  $r$ , а плотность льда — на плотность насыщенного пара  $\rho_n$ :

$$\Delta T = \Delta p \frac{T}{r} \left( \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_g} \right).$$

Плотность насыщенного водяного пара при  $T=373$  К и  $p=1$  атм найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho_n = \frac{pM}{RT} \approx 0,58 \text{ кг/м}^3.$$

Подставляя численные значения, для  $\Delta p=0,01$  атм получаем  $\Delta T \approx 0,28$  К.

Как видите, в этом случае эффект довольно заметный: чтобы увеличить температуру кипения на 1 К, надо поднять давление всего на 0,035 атм, что вполне реально даже при обычных условиях.

А. Черноуцан

## О чем рассказал спектр атома водорода

Как известно, наибольшей простотой отличается излучение изолированных атомов, например атомов одноатомных газов или паров некоторых металлов. Такие спектры представляют собой набор дискретных спектральных линий разной интенсивности, соответствующих разным длинам волн. Их называют линейчатыми спектрами.

При свечении газов или паров, молекулы которых состоят из нескольких атомов возникают полосатые спектры — совокупности групп спектральных линий. Наконец, излучение, испускаемое нагретыми жидкостями и твердыми телами, обладает непрерывным спектром, который содержит все возможные длины волн.

Кроме спектров испускания, существуют и спектры поглощения. Пропустим, например, сквозь пары натрия свет от источника, дающего непрерывный спектр. Тогда в желтой об-

ласти непрерывного спектра возникают две темные линии — линии спектра поглощения натрия. Очень важным является свойство обратимости спектральных линий: атомы поглощают свет, содержащий те спектральные линии, которые эти же атомы испускают. Замечательно, что атом каждого химического элемента создает линейчатый спектр с только ему одному присущим сочетанием спектральных линий, расположенных в различных местах шкалы электромагнитных волн — как в ее видимой области, так и в соседних невидимых ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Подобно тому как на Земле нет двух людей с одинаковыми лицами, в природе нет двух химических элементов, атомы которых обладали бы одинаковыми спектрами.

Оказывается, линейчатые спектры очень тесно связаны с поведением так называемых валентных электронов атома. Дело в том, что электроны в атоме располагаются вокруг ядра слоями, или оболочками, где электроны имеют различные энергии. Кроме того, в разных оболочках содержится не одинаковое число электронов. В самой далекой от ядра, так называемой внешней энергетической оболочке, у разных атомов имеется различное число электронов — от одного до восьми. Например, у атома натрия только один электрон находится во внешней оболочке, у атома углерода таких «внешних» электронов четыре, у хлора — семь. Химики называют внешние электроны валентными — ими определяется валентность атомов, т. е. их способность вступать в химические соединения с другими атомами. Физики называют внешние электроны атомов оптическими — этими электронами определяются все оптические свойства атомов и в первую очередь их спектры.

Линии Бальмера в спектре атома водорода. Атом водорода — простейший из атомов, он состоит всего из одного протона (ядра) и одного электрона. Поэтому линейчатый спектр атома водорода тоже наиболее прост. Именно с изучения этого спектра начала свой путь теоретическая спектро-

скопия — учение о спектрах атомов, молекул, веществ в различных агрегатных состояниях.

Впервые линии в спектре водорода наблюдал и подробно описал немецкий физик И. Фраунгофер. Это были знаменитые теперь фраунгоферовы темные линии поглощения в солнечном спектре. Они возникают, когда излучение Солнца проходит сквозь газы, окружающие его хромосферу. Вначале Фраунгофер обнаружил всего 4 линии, которые впоследствии стали называться линиями  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  и  $H_\delta$ .

В 1885 году И. Бальмер, учитель физики средней школы в городе Базеле (Швейцария), тщательно проанализировал снимки, полученные Фраунгофером и его последователями, и заметил следующее. Если ввести некоторое (как его назвал Бальмер, основное) число  $k$ , то длины волн линий  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  и  $H_\delta$  могут быть выражены таким образом:

$$\begin{aligned}\lambda_{H_\alpha} &= 9/5 k, & \lambda_{H_\beta} &= 4/3 k, \\ \lambda_{H_\gamma} &= 25/21 k, & \lambda_{H_\delta} &= 9/8 k.\end{aligned}$$

Умножив на 4 числители и знаменатели в дробях  $4/3$  и  $9/8$ , Бальмер получил удивительную закономерность: числители в выражениях длин волн всех линий можно представить как последовательность квадратов чисел —

$$3^2, 4^2, 5^2, 6^2,$$

а знаменатели — как последовательность разностей квадратов —

$$3^2 - 2^2, 4^2 - 2^2, 5^2 - 2^2, 6^2 - 2^2.$$

Таким образом, Бальмеру удалось записать одну формулу для длин волн четырех линий:

$$\lambda = k \frac{n^2}{n^2 - 2^2},$$

где  $n = 3, 4, 5$  и  $6$  соответственно для линий  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  и  $H_\delta$ . Если  $\lambda$  измерять в ангстремах ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ), то число  $k$  по Бальмеру оказывается равным  $3645 \text{ \AA}$ .

Вскоре были обнаружены другие линии в спектре поглощения водорода (сейчас известно около 30 линий толь-

ко в видимой области спектра), и их длины волн тоже «укладывались» в формулу Бальмера. О том, с какой точностью это получается, судите по таблице, где приведены результаты наблюдения и вычисления длин волн (в ангстремах) первых семи линий, для которых число  $n$  изменяется от 3 до 9:

	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
$\lambda_{\text{набл}}$	6562,80	4861,33	4340,47	4101,74	3970,06	3889,00	3835,38
$\lambda_{\text{вычисл}}$	6562,80	4861,38	4340,51	4101,78	3970,11	3889,09	3835,43

Эти цифры показывают, что в спектроскопии вычисления производятся с необычайной точностью. До появления спектроскопических расчетов считалось, что наибольшую точность имеют вычисления в астрономии. Однако оказалось, что точность вычислений в спектроскопии не только не уступает, но в ряде случаев и превосходит астрономическую точность.

Бальмер надеялся, что спектры других атомов, более сложных, чем водород, тоже можно будет описывать формулами, похожими на открытую им формулу. По его мнению, отыскание «основного числа» для атомов других элементов будет очень сложной задачей. К счастью для всей атомной физики, и особенно для спектроскопии, Бальмер ошибся. Величина  $k$  вошла в спектральные формулы излучения атомов всех химических элементов (правда, сами формулы отличаются от бальмеровской целым рядом поправочных членов).

**Постоянная Ридберга.** Полный спектр атома водорода. В 1890 году шведский физик-спектроскопист Ридберг записал формулу Бальмера в «перевернутом» виде», для величины  $N=1/\lambda$ . Она называется волновым числом и показывает, какое число длин волн в вакууме укладывается на единичной длине. Волновое число легко связать с частотой света  $\nu$ :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cN,$$

где  $c$  — скорость света. В спектроскопии всегда имеют дело с волновыми числами, а не с частотами. Это связано с тем, что длины волн, а следовательно, и волновые числа, можно определять опытным путем с гораздо большей точностью, чем частоты. (Заметим, что иногда волновое число обозначают той же буквой  $\nu$ , что и частоту колебаний. Правда, из контекста обычно бывает ясно, о чем именно идет речь, но порой это вносит ненужную путаницу.)

«Перевертывая» формулу Бальмера, получаем для волнового числа

$$N = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{k} \frac{n^2 - 4}{n^2} = \frac{4}{k} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Обозначим постоянную величину  $4/k$  через  $R$  (первая буква в фамилии Ридберга). Тогда окончательно формулу Бальмера можно записать в том виде, в каком она обычно используется:

$$N = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

Формула Бальмера показывает, что с увеличением числа  $n$  волновые числа «соседних» спектральных линий имеют все более близкие значения (разность между ними уменьшается) — происходит сближение спектральных линий. Все спектральные линии, волновые числа которых вычисляются по формуле Бальмера, образуют спектральную серию Бальмера. Наибольшее число спектральных линий серии Бальмера (37 линий) было обнаружено в спектре солнечной хромосферы и протуберанцев (облаках раскаленных газов, образующихся на Солнце и выбрасываемых из него). Постоянная Ридберга была с большой точностью измерена на линиях серии Бальмера. Она оказалась равной  $R=109677,581 \text{ см}^{-1}$ .



Удивительное совпадение результатов измерений длин волн линий спектра водорода в видимой области спектра с вычислениями по формуле Бальмера побудило исследователей изучить спектр водорода в других областях. Эти поиски увенчались успехом. Кроме серии Бальмера, в спектре атома водорода были обнаружены другие серии, причем все они описывались спектральными формулами, аналогичными формуле Бальмера.

Так, в далекой ультрафиолетовой части спектра — в области длин волн  $\sim 1200 \text{ \AA}$  и менее — Лайман открыл серию линий, называемую теперь серией Лаймана:

$$N = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 2, 3, 4, \dots$$

В инфракрасной части спектра обнаружилось три серии спектральных линий: в области длин волн от  $10\,000$  до  $20\,000 \text{ \AA}$  — серия Пашена, описываемая формулой

$$N = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 4, 5, 6, \dots,$$

в области длин волн, близких к  $40\,000 \text{ \AA}$ , — серия Брэгкета

$$N = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 5, 6, \dots,$$

наконец, в очень далекой инфракрасной области, вблизи  $75\,000 \text{ \AA}$  — серия Пфунда

$$N = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 6, 7, \dots$$

Таким образом, все спектральные линии, обнаруженные у атома водорода в разных частях спектра, можно охватить одной общей формулой — формулой Бальмера — Ридберга

$$N = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

В этой формуле для каждой серии линий число  $m$  имеет постоянное значение от 1 до 5:  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ , а внутри данной серии число  $n$  принимает ряд возрастающих численных значений, начиная от  $m + 1$ .

Б. Яворский

## Избранные школьные задачи по физике

### 9 класс

1. На стержень действуют две параллельные силы, равные  $F_1 = 10 \text{ Н}$  и  $F_2 = 25 \text{ Н}$  и направленные в противоположные стороны. Определите точку приложения и величину силы, уравновешивающей силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , если их точки приложения расположены на расстоянии  $l = 1,5 \text{ м}$  друг от друга.

2. К гвоздю, вбитому в стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, касаясь стенки, как показано на рисунке 1. Радиус оси катушки  $r = 0,5 \text{ см}$ , радиус ее щечек  $R = 10 \text{ см}$ . Коэффициент трения между стенкой и катушкой  $\mu = 0,1$ . При каком угле  $\alpha$  между нитью и стенкой катушка висит неподвижно?

3. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены шарики массой  $m$  каждый. В третьей вершине находится шарик массой  $2m$ . Найдите положение центра масс этой системы.

4. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга радиусом  $R$ , в котором вырезано круглое отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Где находится ее центр тяжести?

5. Сосуд с водой уравновешен на весах. Сохранится ли равновесие, если опустить палец в воду, не касаясь при этом дна сосуда?

### 10 класс

6. Сопротивление резистора  $R$  рассчитывают по показаниям вольтметра и амперметра, включенных так, как показано на рисунке 2, причем при расчете не вносят поправок на внутренние сопротивления приборов. Какова будет погрешность при измерении сопротивления

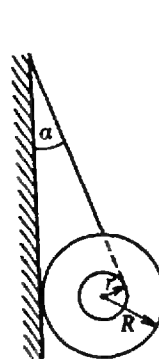


Рис. 1.

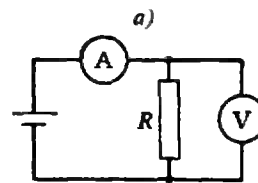
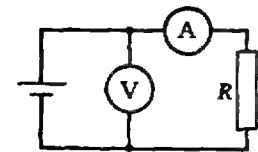


Рис. 2.

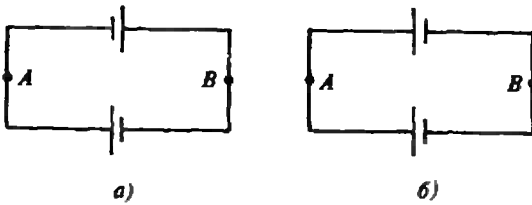


Рис. 3.

резистора в двух случаях:  $R_1=1$  Ом и  $R_2=0,5$  кОм? Сопротивления амперметра и вольтметра равны соответственно  $R_a=0,1$  Ом и  $R_v=1$  кОм.

7. Источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнут на реостат. Постройте графики изменения тока, напряжения, полезной мощности, полной мощности и КПД при изменении сопротивления реостата  $R$ .

8. Два одинаковых аккумулятора с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  соединены так, как показано на рисунке 3. Найдите разность потенциалов между точками А и В. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

9. От источника с напряжением  $U=750$  В необходимо подвести к потребителю мощность  $P=5$  кВт. Какое сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери мощности в ней не превышали 10 % от мощности, дошедшей до потребителя?

10. Электромотор питается от батареи с ЭДС  $\mathcal{E}=12$  В. Какую механическую работу совершает мотор за одну секунду при проте-

кании по его обмотке тока  $I_1=2$  А, если при полном затормаживании якоря в цепи течет ток  $I_2=3$  А?

#### 11 класс

11. Сколько процентов от скорости света должна составлять скорость протона, движущегося в ускорителе, чтобы увеличение его массы составило 25 %?

12. При взаимодействии ядер алюминия  $^{27}_{13}\text{Al}$  с  $\alpha$ -частицами образуются ядра изотопа магния  $^{24}_{12}\text{Mg}$  и  $\gamma$ -частицы. При взаимодействии же  $\gamma$ -частиц с ядрами алюминия  $^{27}_{13}\text{Al}$  образуются ядра изотопа магния  $^{24}_{12}\text{Mg}$  и  $z$ -частицы. Какие широко известные частицы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  участвуют в этих ядерных реакциях?

13. При распаде  $\lambda$ -мезона на два фотона зарегистрировано, что эти фотоны разлетаются под углами  $\alpha=30^\circ$  и  $\beta=60^\circ$  к направлению движения мезона. С какой скоростью двигался мезон до распада?

14. Протон, летевший со скоростью  $v_0=7,5 \cdot 10^4$  м/с, сталкивается с покоящимся невозбужденным атомом водорода. После столкновения протон летит в том же направлении, но со скоростью  $v_1=1,5 \cdot 10^4$  м/с; атом же переходит в состояние с более высокой внутренней энергией. Какова длина волны фотона, который может испустить атом, возвращаясь в невозбужденное состояние?

15. Какая энергия выделяется при термоядерной реакции



Публикацию подготовила В. Тихомирова

## Конкурс «Математика 6—8»

кой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

#### Задачи

19. На плоскости расположен равносторонний треугольник  $ABC$ . Укажите все такие точки  $M$  этой плоскости, для которых оба треугольника  $ABM$  и  $ACM$  — равнобедренные.

А. Савин

20. Андрей делит по своему усмотрению кучку из 200 спичек на 6 кучек (каждая из них содержит по крайней мере одну спичку), а затем Борис выравнивает количество спичек в двух из этих кучек, беря несколько спичек из одной кучки. Число спичек, взятых Борисом, назовем выигрышем Андрея. Борис

стремится взять как можно меньше спичек. Как надо играть Андрею, чтобы он обеспечил себе максимально возможный выигрыш?

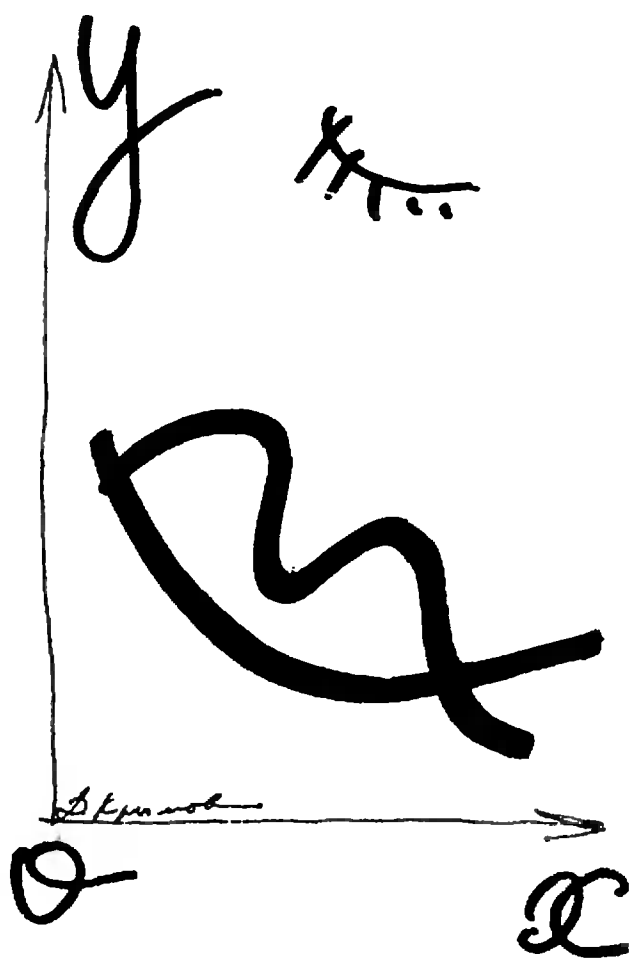
Х. Хаимов

21. На шахматной доске горизонтали и вертикали пронумерованы числами от 1 до 8. На ней расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Для каждой ладьи вычислим произведение номеров горизонтали и вертикали, на которых она стоит. Возьмем сумму этих произведений. Докажите, что для расстановки ладей, центральной симметричной данной, полученная аналогичным образом сумма равняется первоначальной.

В. Произволов

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 мая 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с помет-



Математический кружок

# Сумма минимумов И МИНИМУМ СУММЫ

Р. АЛЕКСЕЕВ.  
Л. КУРЛЯНДЧИК

В этой статье речь пойдет об одном общем методе, с помощью которого можно доказать многие знаменитые неравенства. Исходная идея совсем проста. Две произвольные функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные, скажем, на некотором отрезке  $[a, b]$ , достигают своих минимумов (вообще говоря) в разных точках (рис. 1). Справедливо неравенство

$$\min f(x) + \min g(x) \leq \min (f(x) + g(x)).$$

В самом деле, минимум суммарной функции  $f(x) + g(x)$  достигается в какой-нибудь точке отрезка  $[a, b]$ . В этой точке значения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  не меньше своих минимумов. Ясно, что неравенство превращается в равенство, если минимумы  $f(x)$  и  $g(x)$  достигаются в одной и той же точке.

Точно так же обстоит дело и в случае  $n$  функций:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) + \dots + \min f_n(x) &\leq \\ &\leq \min (f_1(x) + \dots + f_n(x)). \end{aligned}$$

Доказательство легко получить по индукции. В правой части будем выделять по одной функции:  $\min (f_1(x) + \dots + f_n(x)) \geq \min (f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x) + \min f_n(x))$  и так далее.

## Минимумы квадратичных функций и квадратичные неравенства

Начнем с квадратичных функций вида  $f(x) = ax^2 + 2bx$ , где  $a > 0$ . Чтобы найти минимум, выделим полный квадрат

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Итак, минимум достигается при  $x = -\frac{b}{a}$  и равен  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a}$ .

Теперь к  $n$  функциям

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1x^2 + 2b_1x, \\ f_2(x) &= a_2x^2 + 2b_2x, \\ &\dots \\ f_n(x) &= a_nx^2 + 2b_nx \end{aligned}$$

применим наше основное неравенство. Функция  $f(x)$  имеет минимум при  $x =$

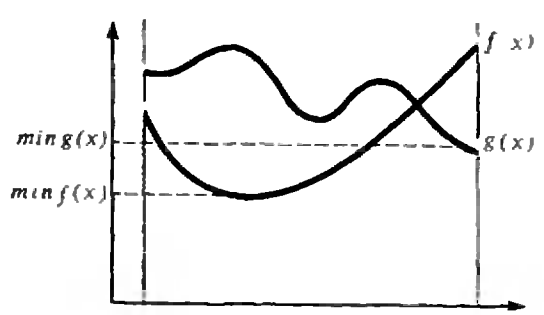


Рис. 1.

$= -\frac{b_i}{a_i}$ , равный  $-\frac{b_i^2}{a_i}$ , а минимум суммарной функции достигается при

$$x = -\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}$$

и равен  $-\frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + \dots + a_n}$ . Поэтому в результате мы получим

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + \dots + a_n}$$

(для удобства мы поменяли знаки в левой и правой частей).

Теперь нам уже несложно доказать несколько известных неравенств.

Упражнение 1. Выведите из последней формулы

а) неравенство Коши — Бунаковского

$$\sqrt{(c_1^2 + \dots + c_n^2)(d_1^2 + \dots + d_n^2)} \geq c_1 d_1 + \dots + c_n d_n$$

б) неравенство о среднем квадратическом и среднем арифметическом

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

в) неравенство о среднем арифметическом и среднем гармоническом

$$\frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}$$

Указание. а) Сделайте замену  $b_1 = c_1^2, \dots, b_n = c_n^2, a_1 = c_1 d_1, \dots, a_n = c_n d_n$ , б) положите  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ , в) положите  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

### Экспоненциальные функции

Теперь вместо квадратичной функции рассмотрим более сложную:  $f(x) = ae^x - bx - b$  (где  $a, b > 0$ ).

Упражнение 2. Найдите наименьшее значение этой функции.

Ответ. Наименьшее значение достигается при  $x = \ln \frac{b}{a}$ . Оно равно  $-b \ln \frac{b}{a}$ .

Таким образом, для  $n$  функций

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 e^x - b_1 x - b_1, \\ &\dots \\ f_n &= a_n e^x - b_n x - b_n \end{aligned}$$

(где все числа  $a_i$  и  $b_i$  положительны) основное неравенство дает

$$\begin{aligned} b_1 \ln \frac{b_1}{a_1} + \dots + b_n \ln \frac{b_n}{a_n} &\geq \\ &\geq (b_1 + \dots + b_n) \ln \frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n} \end{aligned}$$

После несложных преобразований:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n} &\geq \\ &\geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)^{b_1 + \dots + b_n} \end{aligned}$$

Упражнение 3. Выведите из этого утверждения

а) неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом)

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

б) красивое неравенство

$$b_1^{b_1} \cdot \dots \cdot b_n^{b_n} \geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right)^{b_1 + \dots + b_n}$$

в) весьма полезное неравенство

$$c_1 b_1 + \dots + c_n b_n \geq c_1^{b_1} \cdot \dots \cdot c_n^{b_n}$$

где  $b_1 + \dots + b_n = 1$ .

Указание. Положите а)  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = \frac{1}{n}$ ,

б)  $a_1 = \dots = a_n = 1$ , в)  $b_1 + \dots + b_n = 1; c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, c_n = \frac{a_n}{b_n}$ .

Конечно, существуют другие способы доказательства всех этих неравенств. Но в каждом случае приходится придумывать свой способ. Здесь же все они получены общим методом.

### Функции двух переменных.

#### Неравенство Гельдера

Основной принцип — сумма минимумов нескольких функций не превосходит минимума их суммы — сохраняет силу и для случая функций нескольких переменных. Причем его доказательство в этом случае не меняется.

Рассмотрим простейшую функцию двух переменных — линейную:

$$f(x; y) = ax + by.$$

Как это ни удивительно, но с помощью этой элементарной функции можно получить совсем непростые неравенства.

Задача. Докажите неравенства

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} &\geq \\ &\geq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2} \end{aligned}$$

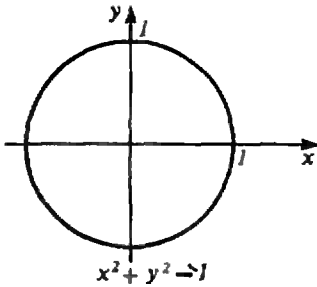


Рис. 2.

$$b) (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, \text{ если } p > 0, q > 0$$

числа такие, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (неравенство Гельдера).

Решение. Как обычно, рассмотрим  $n$  функций

$$f_1(x; y) = a_1 x + b_1 y,$$

$$\dots$$

$$f_n(x; y) = a_n x + b_n y.$$

Самое главное — правильно выбрать множества, на которых мы рассматриваем наши функции. Ведь наши функции определены на плоскости и мы можем находить минимумы на любой фигуре!

а) Рассмотрим окружность радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 2). Что же означает геометрически линейная функция  $f(x; y) = ax + by$ ? Это скалярное произведение векторов с координатами  $(a; b)$  и  $(x; y)$ . Но скалярное произведение — это произведение длин векторов на косинус угла между ними. Косинус угла — минимальный для коллинеарных векторов, а длина вектора  $(x; y)$  не меняется, если конец вектора лежит на окружности. Значит, минимум функции  $f(x; y)$  достигается на векторе с координатами  $(x_0; y_0)$ , коллинеарном  $(a; b)$  (рис. 3). Такой вектор равен

$$\overline{(x_0; y_0)} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \text{ а скалярное произведение}$$

$$\overline{(x_0; y_0)} \cdot \overline{(a; b)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Итак, в случае окружности

$$\min(ax + by) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Теперь нам ничего не стоит доказать неравенство а). Слева в нем стоят минимальные значения функций  $f_1, \dots, f_n$

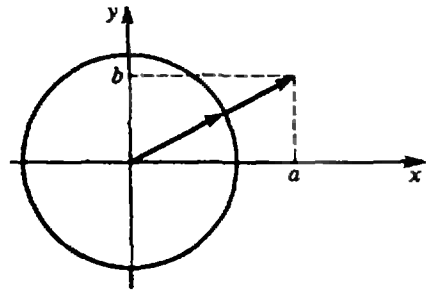


Рис. 3.

на окружности, а справа — минимум их суммы.

б) Возьмем множество, которое состоит из точек  $(x; y)$ , для которых

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Найдем минимум функции  $f(x; y) = ax + by$  на этом множестве. Конечно, мы могли бы решить эту не совсем простую задачу аналитически (и советуем читателям попробовать сделать это), но, к счастью, накопленный нами запас знаний позволяет избежать этого. Воспользуемся неравенством в) из упражнения 3:

$$ax + by = \frac{1}{p} \cdot pax + \frac{1}{q} \cdot qby \geq$$

$$\geq (pax)^{\frac{1}{p}} \cdot (qby)^{\frac{1}{q}} = (pa)^{\frac{1}{p}} \cdot (qb)^{\frac{1}{q}}.$$

Проверьте, что неравенство достигается, если  $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ . Итак, минимум функции  $f(x; y)$  на нашем множестве

равен  $(pa)^{\frac{1}{p}} \cdot (qb)^{\frac{1}{q}}$ . Если мы положим

$$a = \frac{c^p}{p}, b = \frac{d^q}{q} \text{ (т. е. будем брать линей-$$

ную функцию  $\frac{c^p}{p}x + \frac{d^q}{q}y$ ), то этот минимум окажется равным  $cd$ . Ну, а если мы сделаем то же самое с каждой из наших функций  $f_1, \dots, f_n$ :

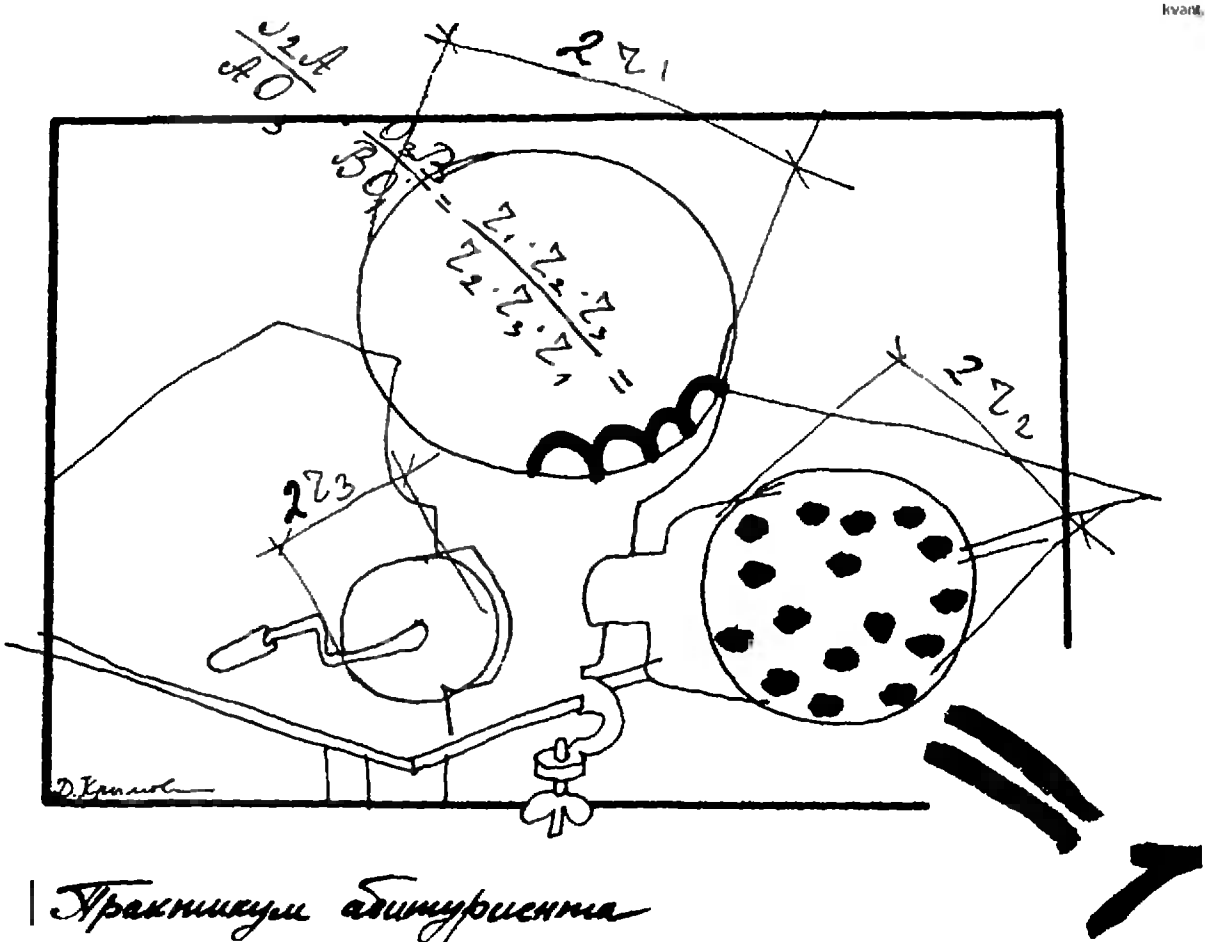
$$a_1 = \frac{c^p}{p}, b_1 = \frac{d^q}{q}, \dots,$$

$$\dots, a_n = \frac{c_n^p}{p}, b_n = \frac{d_n^q}{q},$$

то мы получим неравенство Гельдера!

А теперь давайте сравним неравенство Коши — Буняковского с неравен-

(Окончание см. на с. 55)



## Тракникуи абимурисенна

# Теорема Менелая

В. ОРАЧ

Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

Пусть  $\triangle ABC$  пересечен прямой, не параллельной стороне  $AB$  и пересекающей две его стороны  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $B_1$  и  $A_1$ , а прямую  $AB$  в точке  $C_1$  (рис. 1), тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

(Чтобы не запутаться, в каком порядке идут буквы в формуле, придерживайтесь следующего правила: двигайтесь по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.)

Доказательство. Из вершин треугольника проведем параллельные друг другу отрезки до пересечения с секущей прямой. Образуются три пары подобных треугольников. Из подобия получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m}{n},$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{n}{l},$$

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{l}{m}.$$

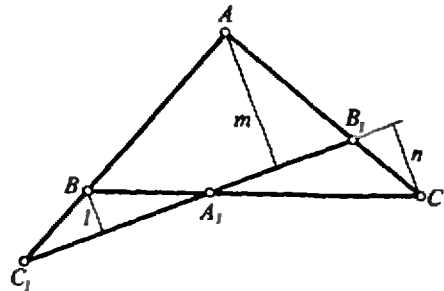


Рис. 1.

Осталось перемножить полученные пропорции:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{m \cdot n \cdot l}{n \cdot l \cdot m} = 1.$$

Теорема доказана.

Эта теорема дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского (I в. н. э.).

Чтобы продемонстрировать ее эффективность, рассмотрим решение одной задачи двумя способами: векторным и с помощью теоремы Менелая.

**Задача 1.** Пусть  $AD$  — медиана  $\triangle ABC$  (рис. 2). На  $AD$  взята точка  $K$  так, что  $AK:KD=3:1$ . В каком отношении прямая  $BK$  делит площадь  $\triangle ABC$ ?

Очевидно, отношение площадей треугольников  $ABP$  и  $CBP$  равно отношению отрезков  $AP$  и  $PC$ . Итак, решение задачи сводится к нахождению отношения  $AP/PC$ .

**Векторное решение.** Вектор  $\overline{AK}$  выразим двумя способами через векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ . Прежде всего,  $\overline{AK} = \frac{3}{4} \overline{AD}$ . Но  $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$  (формула середины отрезка). Значит,

$$\begin{aligned} \overline{AK} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \\ &= \frac{3}{8} \overline{AB} + \frac{3}{8} \overline{AC}. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим  $\frac{PK}{KB} = \frac{m}{n}$ ,  $\overline{AP} = x \cdot \overline{AC}$ .

Применяя к  $BP$  теорему о делении отрезка в данном отношении, имеем

$$\overline{AK} = \frac{m}{m+n} \overline{AB} + \frac{n}{m+n} \overline{AP}.$$

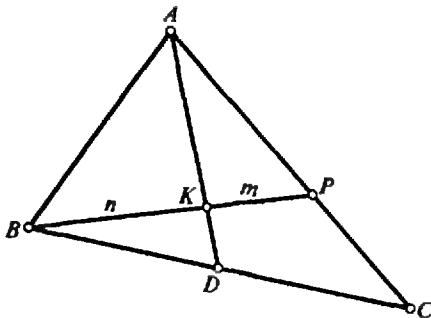


Рис. 2.

Но  $\overline{AP} = x \cdot \overline{AC}$ , значит,

$$\overline{AK} = \frac{m}{m+n} \overline{AB} + \frac{nx}{m+n} \overline{AC}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$\frac{m}{m+n} \overline{AB} + \frac{nx}{m+n} \overline{AC} = \frac{3}{8} \overline{AB} + \frac{3}{8} \overline{AC}.$$

Используя однозначность разложения вектора  $\overline{AK}$  по двум неколлинеарным векторам  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , получаем систему

$$\begin{cases} \frac{m}{m+n} = \frac{3}{8}, \\ \frac{nx}{m+n} = \frac{3}{8x}, \end{cases}$$

откуда  $x = 3/5$ , т. е.  $AP/AC = 3/5$ , и

$$\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Решение с помощью теоремы Менелая. Применяя эту теорему к треугольнику  $ACD$  и секущей прямой  $BP$ , имеем

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{AK} = 1,$$

$$\frac{AP}{PC} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Преимущество применения теоремы Менелая очевидно.

Очень часто при решении задач нужна не сама теорема Менелая, а теорема, обратная к ней.

Рассмотрим треугольник  $ABC$ . Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  принадлежат прямым  $BC, AC, AB$  соответственно, т. е. лежат на сторонах треугольника или их продолжениях (рис. 3).

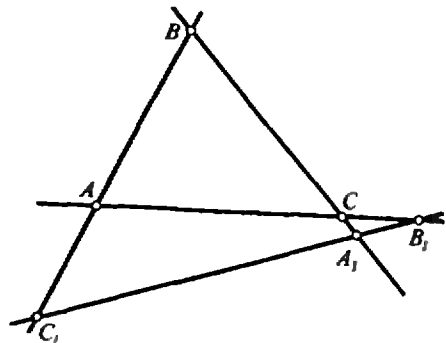


Рис. 3.

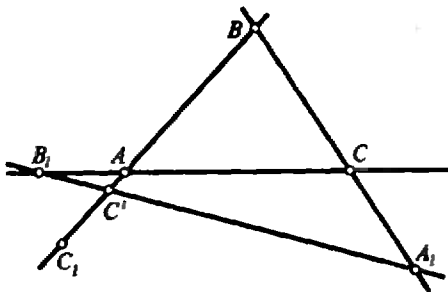


Рис. 4.

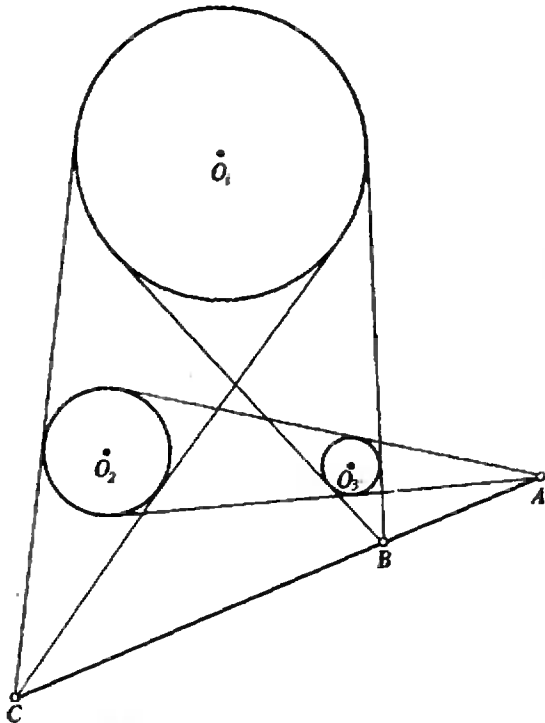


Рис. 5.

Если  $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ , то точки  $A_1$ ,

$B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.

Доказательство. Предположим противное, т. е. точка  $C_1$  не лежит на

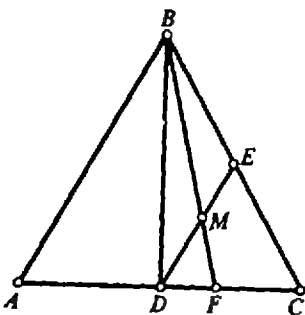


Рис. 6.

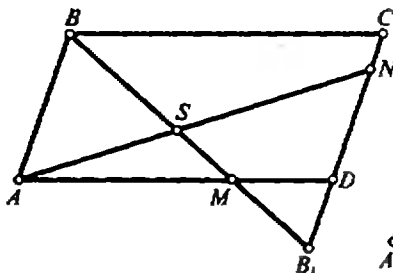


Рис. 7.

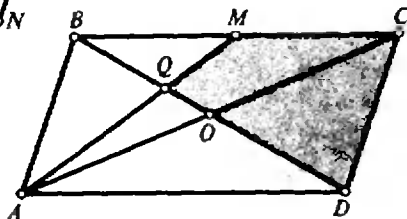


Рис. 8.

прямой  $A_1B_1$  (рис. 4). Пусть  $C'$  — точка пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $AB$ . Тогда, согласно прямой теореме Менелая,  $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ . Но очевидно, что  $\frac{BC_1}{C_1A} \neq \frac{BC'}{C'A}$ . Поэтому соотношение в условии теоремы не может быть выполнено. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

Следующая красивая задача, вероятно, так же как и теорема Менелая, известна с глубокой древности. Она не раз использовалась на олимпиадах, а в отдельных случаях — и на вступительных экзаменах...

**Задача 2.** Три окружности разных радиусов расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Каждой паре окружностей сопоставим точку пересечения внешних двойных касательных. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой (рис. 5).

Решение. Пусть радиусы окружностей с центрами  $O_1, O_2, O_3$  равны  $r_1, r_2, r_3$  соответственно. Тогда

$\left| \frac{O_1C}{CO_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}$ , так как окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  гомотетичны относительно точки  $C$ , а отношение радиусов  $\left| \frac{r_1}{r_2} \right|$  — коэффициент гомотетии. Ана-

логично,  $\frac{O_2A}{AO_3} = \frac{r_2}{r_3}$ ;  $\frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1}$ . Таким

образом,  $\frac{O_1C}{CO_2} \cdot \frac{O_2A}{AO_3} \cdot \frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1$ .

По теореме, обратной к теореме Менелая, точки  $A, B, C$  принадлежат одной прямой.



**Упражнения**

1. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  даны соответственно точки  $M$  и  $N$  такие, что  $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$ . В каком отношении

точка  $S$  пересечения отрезков  $BN$  и  $CM$  делит каждый из этих отрезков?

2. В  $\triangle ABC$  биссектриса  $AD$  делит  $BC$  в отношении  $2:1$ . В каком отношении медиана  $CE$  делит эту биссектрису?

3. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  взята точка  $D$ , а на стороне  $BC$  точки  $E$  и  $F$  так, что  $AD:DB=3:2$ ,  $BE:EC=1:3$  и  $BF:FC=4:1$ . В каком отношении прямая  $AE$  делит отрезок  $DF$ ?

4. Ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  делит высоту пополам. Докажите, что  $\cos \angle C = \cos \angle A \cdot \cos \angle B$ , где  $\angle A, \angle B, \angle C$  — углы при вершинах.

5. В правильном треугольнике  $ABC$  со стороны  $a$  точка  $E$  — середина  $BC$ ,  $D$  — середина  $AC$ ,  $F \in DC$ ,  $BF \cap DE = M$ ,  $S_{ABMD} = \frac{5}{8} S_{ABC}$ . Найдите  $MF$  (рис. 6).

6. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $M$  делит отрезок  $AD$  в отношении  $p$ , а точка  $N$  делит отрезок  $DC$  в отношении  $q$ . Прямые  $BM$  и  $AN$

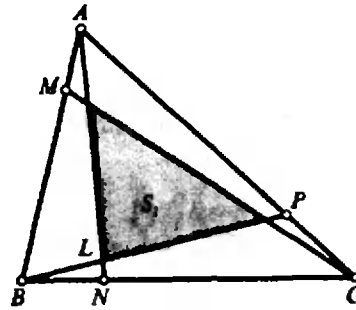


Рис. 9.

пересекаются в точке  $S$ . Вычислите отношение  $AS:SN$  (рис. 7).

7. Через середину  $M$  стороны  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ , площадь которого равна 1, и вершину  $A$  проведена прямая, пересекающая диагональ  $BD$  в точке  $Q$ . Найдите площадь четырехугольника  $QMCD$  (рис. 8).

8. Стороны  $\triangle ABC$  разделены точками  $M, N$  и  $P$  так, что  $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:4$ . Найдите отношение площади треугольника, ограниченного прямыми  $AN, BP$  и  $CM$ , к площади треугольника  $ABC$  (рис. 9).

## Сумма минимумов и минимум суммы

(Начало см. на с. 49)

ством Гельдера. Ясно, что первое — частный случай второго при  $p=q=2$ . Поэтому, если ввести «длину» вектора

$(a; b)$  по правилу  $|(a; b)|_p = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$ , то окажется, что скалярное произведение двух векторов

$$(a; b) \cdot (c; d) \leq |(a; b)|_p \cdot |(c; d)|_q$$

не превосходит произведения их «длин».

В этом состоит геометрическая интерпретация неравенства Гельдера и его смысл.

Итак, метод ясен. Мы доказали довольно-таки большое количество неравенств (и среди них несколько классических), пользуясь весьма скромным набором функций. Возможно, что читатели смогут доказать другие интересные неравенства с помощью этого метода.

**Упражнение 4.** Докажите следующие неравенства  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  — положительные числа

а)  $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)}$ ,

б)  $(1 + a_1) \dots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n$  (неравенство Гюйгенса),

в)  $(a_1^q + \dots + a_n^q)^{\frac{1}{q}} \cdot (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ , если  $q < 0$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(неравенство Гельдера «наоборот»),

г)  $(a_1^q + \dots + a_n^q)^{\frac{1}{q}} + (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} >$

$\geq ((a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}}$ , где  $p > 1$  (неравенство Минковского). Докажите, что если  $p < 1$ , то неравенство меняется на противоположное.

**Указания.** а) Рассмотрите линейную функцию  $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  от  $n$  переменных на множестве, состоящем из наборов  $(x_1, \dots, x_n)$  таких, что  $x_1 \dots x_n = 1$ . б) Положите в предыдущем неравенстве  $b_1 = \dots = b_n = 1$ . г) Снова рассмотрите линейную функцию  $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  на множестве, задаваемом условием:

$$x_1^q + \dots + x_n^q = 1,$$

где число  $q$  определяется условием  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

## Р-значим ракета

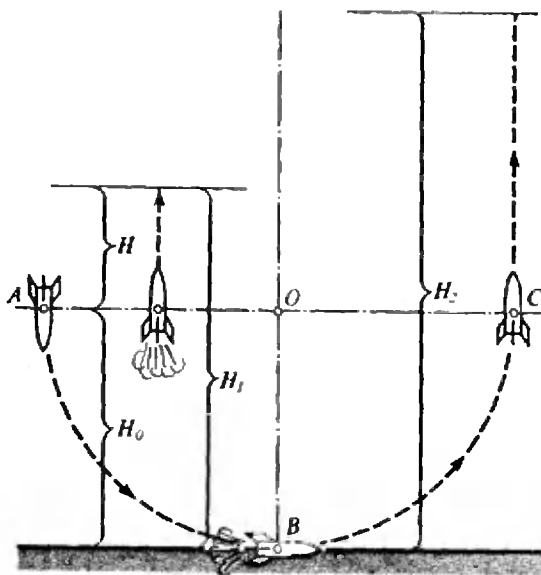
# Бросай вниз, если хочешь взлететь повыше

В. ТУРОВ

Представим себе, что у нас есть одноступенчатая ракета, имеющая наибольшую высоту подъема  $H$  в поле тяготения планеты, и самолет или аэростат достаточной грузоподъемности, способный поднять указанную ракету на высоту  $H_0$ . Какой наибольшей высоты позволяет достичь подобная система?

Обычно ответ на этот вопрос следует практически мгновенно: «В соответствии с законом сохранения энергии, наибольшая высота  $H_1 = H + H_0$ » — и является ошибочным. В чем же дело?

Рассмотрим математический маятник с нитью длиной  $H_0$ , точка подвеса которого  $O$  находится на высоте  $H_0$  над поверхностью планеты (см. рисунок). К свободному концу нити прикрепим нашу ракету, отведем ее в крайнее левое положение (в точку  $A$ )



и отпустим свободно падать. Пусть в тот момент, когда ракета проходит самую нижнюю точку (точку  $B$ ) траектории (считаем, что ракета движется «носом вперед»), включается ее двигатель, а когда ракета достигает крайнего правого положения (точка  $C$ ), она освобождается от крепления к нити и движется далее свободно. Рассчитаем, на какую высоту  $H_2$  она поднимется.

Для простоты предположим, что поле тяготения является однородным (ускорение свободного падения  $g = \text{const}$ ), а время работы двигателя пренебрежимо мало по сравнению со временем подъема ракеты «по инерции». Это позволяет считать, что двигатель мгновенно сообщает ракете приращение импульса, а масса ракеты уменьшается скачком на величину массы израсходованного топлива — горючего и окислителя. (При учете конечности времени работы двигателя и непрерывного изменения массы ракеты все основные выводы качественно сохраняются и претерпевают лишь количественные изменения.) Кроме того, пренебрежем силами трения в атмосфере и будем считать, что КПД двигателя равен единице.

В соответствии с законом сохранения энергии и с учетом сделанных предположений, получим, что перед включением двигателя ракета имеет в точке  $B$  скорость  $v_1 = \sqrt{2gH_0}$ . После включения двигателя скорость ракеты станет  $v_2 > v_1$ . Для вычисления этой величины перейдем в инерциальную систему отсчета, скорость которой совпадает со скоростью ракеты в точке  $B$  до включения двигателя. В этой системе импульс ракеты в точке  $B$  до включения двигателя был

$$P'_1 = 0.$$

Так как в точке  $B$  на ракету не действуют внешние силы, имеющие горизонтальную составляющую, то, в соответствии с законом сохранения импульса, после включения двигателя ракета в движущейся системе приобретает импульс

$$P'_2 = mv'_2 = \Delta P' = \Delta mc',$$

где  $m$  — масса ракеты без топлива и окислителя,  $\Delta m$  — масса выбрасываемого топлива.

мых двигателем газов, равная массе горючего и окислителя,  $v_2'$ ,  $\Delta P'$  и  $c'$  — соответственно скорость ракеты, импульс и скорость выбрасываемых двигателем газов в движущейся системе отсчета после включения двигателя.

Если вернуться в неподвижную систему координат, то скорость ракеты после включения двигателя будет

$$v_2 = v_2' + v_1 = \Delta m / m c' + v_1.$$

Еще раз используем закон сохранения энергии и получим выражение для наибольшей высоты подъема ракеты в рассматриваемом случае:

$$H_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{1}{2g}(v_2'^2 + v_1^2 + 2v_2'v_1).$$

Учтем, что

$$v_2'^2 / (2g) = H, \quad v_1^2 / (2g) = H_0.$$

Тогда

$$H_2 = H + H_0 + 2\sqrt{HH_0} > H_1 = H + H_0.$$

В случае  $H = H_0$  имеем

$$H_2 = 2H_1.$$

Полученный ответ может вызвать внутреннюю неудовлетворенность, хотя в рамках сделанных предположений противоречий нет. Ситуация прояснится, если обратить внимание на то, что, когда двигатель включается у движущейся ракеты, происходит перераспределение химической энергии топлива и запасенной при подъеме на высоту  $H_0$  гравитационной энергии между кинетической энергией ракеты и кинетической энергией выброшенных двигателем газов, причем в пользу ракеты.

Рассмотрим баланс энергий для различных способов запуска ракеты. В начальный момент полная энергия системы равна

$$E = (m + \Delta m)gH_0 + W,$$

где  $W$  — химическая энергия топлива. При «традиционном» способе запуска ракеты на высоте  $H_0$  после включения двигателя энергия равна

$$E = (m + \Delta m)gH_0 + \frac{\Delta mc'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}.$$

В этом случае механическая энергия ракеты, определяющая высоту ее

подъема, равна

$$E - \frac{\Delta mc'^2}{2} - \Delta mgH_0.$$

При включении двигателя в точке  $B$  эта же энергия  $E$  распределяется таким образом:

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\Delta mc^2}{2},$$

где  $c$  — скорость выбрасываемых газов относительно неподвижной системы отсчета. Часть энергии, используемая для набора высоты, в этом случае будет равна

$$E - \frac{\Delta mc^2}{2}.$$

Так как  $c = c' - v_1$ , то  $c^2 = c'^2 - 2c'v_1 + v_1^2 = c'^2 - 2c'v_1 + 2gH_0$ . Видно, что

$$\frac{\Delta mc^2}{2} < \frac{\Delta mc'^2}{2} + \Delta mgH_0,$$

т. е.

$$E - \frac{\Delta mc^2}{2} - \Delta mgH_0 < E - \frac{\Delta mc'^2}{2}.$$

На то обстоятельство, что ракета может взлететь выше, если запустить ее столь необычным способом, впервые указал в своей книге «Введение в космонавтику» замечательный ученый А. Штернфельд. Докторант Сорбонны и инженер отдела С. П. Королева в РНИИ, этой колыбели ракетостроения в нашей стране, преподаватель техникума в маленьком уральском городке и лауреат Международной премии Галабера по астронавтике, которой он был удостоен вместе с Ю. А. Гагариным, — таковы лишь отдельные штрихи жизни этого удивительного человека, обладавшего уникальной способностью видеть новое в казалось бы давно изученных проблемах.

В 1974 году издательство «Наука» выпустило вторым изданием книгу А. Штернфельда «Введение в космонавтику», а в 1987 году там же вышла биографическая книга В. Прищепы и Г. Дроновой «Ари Штернфельд — пионер космонавтики». Хотелось бы обратить внимание читателей журнала на эти книги.

# „Квант“ улыбается

## Можно ли построить правильный $2^{16} (2^{16} + 1)$ -угольник?

На эту тему разгорелся спор, когда однажды за столом собрались поклонники «Кванта».

**Математик-логик.** Да! Поскольку  $2^{16} + 1$  — простое число Пьера, то, как доказал Карл, такой правильный многоугольник построить можно.

**Математик-историк.** Он и был построен немецким профессором Гермесом. Удвоение числа сторон не представляет труда. Изложение занимает солидный чемодан и хранится в Геттингенском университете. Кто захочет, может прочитать.

**Математик-редактор.** Но его работу до сих пор никто не рецензировал! И неизвестно, верна она или нет!

**Математик-методист.** Возможность построения не вызывает сомнений. Но вопрос ставится несколько по-иному — как это сделать вот здесь. (Кладет на стол лист бумаги, карандаш, линейку и циркуль.)

**Математик-философ.** Не понимаю, в чем загвоздка — доказано, что способ построения существует; известно, что доказательство вполне конструктивное. Следовательно, можно!

**Математик - экономист.** Можно — не можно, надо подсчитать (вынимает микрокалькулятор). Если для построения каждой стороны потратить, скажем, секунду, и работу организовать в три смены, то ... О-го-го — 136 лет. Нет, нельзя!

**Математик - кибернетик.** А компьютер зачем? Составим программку... За

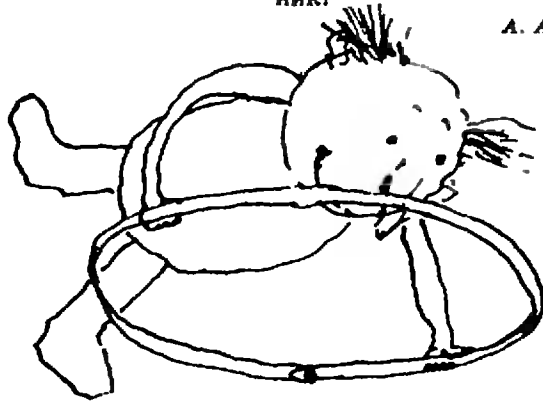
час с небольшим справимся!

**Физик-теоретик.** Дайте-ка и я прикину (начинает вертеть в руке карандаш). Если атомы углерода... в один слой... а диаметр описанной окружности пускай 30 см... расстояние между соседними ячейка-

ми в кристаллической решетке графита  $1,4 \text{ \AA}$ , то ... м-м-м... длина окружности  $9,4 \cdot 10^9 \text{ \AA}$ , ... В принципе можно расставить на окружности нужное число атомов углерода! ... Вот только на равном расстоянии... м-м-м... колебания ...

**Физик-экспериментатор.** Зачем эти расчеты? (Берет циркуль и чертит окружность.) Пожалуйста. Пусть кто-нибудь из вас, не вставая с места, докажет мне, что это не есть правильный  $4\ 295\ 032\ 832$ -угольник!

А. Азамов



**Варианты  
ступенчатых  
экзаменов**

**Новосибирский  
государственный  
университет  
им. Ленинского комсомола**

**Математика**

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

*(механико-математический и экономический факультеты)*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 112, \\ 2x - 7y = 1. \end{cases}$$

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6 \sin^2 x = 5 - 13 \cos x + 3 \cos 2x.$$

3. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB=14$ ,  $AC=15$ ,  $BC=13$  через основание высоты  $CH$  проводятся прямые, параллельные прямым  $AC$  и  $BC$ , которые пересекают соответственно стороны  $BC$  и  $AC$  треугольника в точках  $M$  и  $N$ . Прямая  $MN$  пересекает продолжение стороны  $AB$  в точке  $D$ . Найдите длину отрезка  $BD$ .

4. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{(x+1) \log_3(x^2+x+1/2)} \geq 0.$$

5. Ребро куба  $ABCA'B'C'D'$  равно  $2a$ . Отрезок  $PQ$ , концы которого лежат на прямых  $AB'$  и  $BC'$ , пересекается с прямой  $CD'$  в точке  $O$  и делится этой точкой пополам. Найдите длину отрезка  $PQ$ .

**Вариант 2**

*(физический факультет)*

1. Решите уравнение

$$1 - 8 \cos^2 x = 9 \sin 2x + 3 \cos 2x.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 + 2x - 24| > 6x + 8.$$

3. Около равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB=BC$ ) с углом  $B$ , равным  $30^\circ$ , описана окружность  $S$  радиусом  $R$ ,  $AD$  — ее диаметр, проведенный из точки  $A$ . Найдите радиус окружности, касающейся стороны  $AC$  данного треугольника, диаметра  $AD$  и окружности  $S$ .

4. На координатной плоскости задана парабола  $y = x^2/2 + x + 13/2$  и касательная к ней, параллельная прямой  $y = 6x$ .

Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются: точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина данной параболы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  через вершину  $A$  и середину бокового ребра  $SC$  проведено сечение плоскостью, параллельной диагонали  $BD$  основания  $ABCD$ . Известно, что площадь сечения равна 9, а плоскость сечения образует угол  $60^\circ$  с плоскостью основания. Найдите объем данной пирамиды.

**Вариант 3**

*(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Решите уравнение

$$\log_x 2 + \log_{2x} 4 = \log_{8x} 16.$$

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$2 \cos^2 x = 1 - 7 \sin x - 2 \cos 2x.$$

3. Прямая  $l_1$  касается окружностей  $O_1$  и  $O_2$  внешним образом (т. е. окружности лежат по одну сторону от прямой  $l_1$ ), расстояние между точками касания равно 24. Прямая  $l_2$  является внутренней общей касательной (т. е. окружности лежат по разные стороны от прямой  $l_2$ ), расстояние между точками касания в этом случае равно 7. Наименьшее расстояние между точками окружностей  $O_1$  и  $O_2$  равно 1. Найдите радиусы данных окружностей.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x+22}}{x+4} < 1.$$

5. В основании прямой треугольной призмы  $ABCA'B'C'$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $\sqrt{3}$ , боковые ребра имеют длину 4. Пусть  $K$  — точка пересечения диагоналей  $BC'$  и  $B'C$  боковой грани  $BB'C'C$ . Сфера, центр которой принадлежит призме, касается грани  $ABC$ ,  $AA'B'B$ ,  $AA'C'C$  и прямой  $A'K$ . Найдите радиус сферы.

**Физика**

*Письменный экзамен*

**Физический факультет**

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

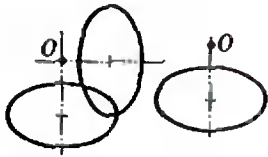


Рис. 1.

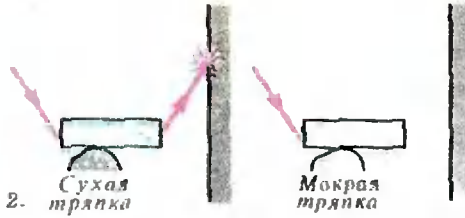


Рис. 2.

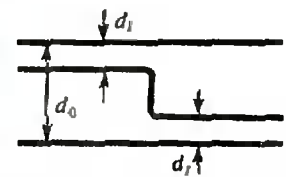


Рис. 3.

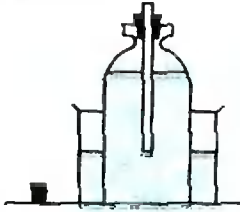


Рис. 4.

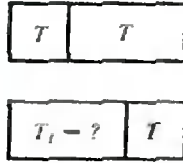


Рис. 5.

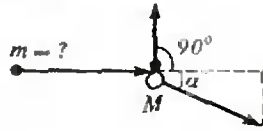


Рис. 6.

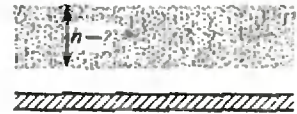


Рис. 7.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

### Вариант 1

1. Два одинаковых равномерно заряженных тонких кольца сначала расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом в точке  $O$  (рис. 1). Затем кольца совмещаются. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в точке  $O$ , находящейся в обоих случаях на расстоянии радиуса от центров колец? (68 %)

2. Самолет движется вдоль отвесной стены. Под каким углом к направлению движения самолета пилот слышит эхо, отраженное от этой стены? Скорость звука  $v$ , скорость самолета  $u$ . (78 %).

3. Ствол пружинной пушки направлен под углом  $45^\circ$  к гладкому полу. Масса снаряда равна массе пушки. Определите

отношение высот подъема снаряда при выстрелах из незакрепленной и закрепленной пушки. (32 %)

4. Оцените, какой максимальный вес покажут пружинные весы при взвешивании тела массой один килограмм в космическом корабле, движущемся по околоземной круговой орбите. (13 %)

5. Луч лазера пускают на торец бруска из оргстекла, при этом за бруском на экране наблюдается яркое пятно света (рис. 2). После того как к бруску в некотором месте прикасаются мокрой тряпкой, пятно света на экране исчезает. Прикосновение сухой тряпкой такого эффекта не вызывает. Объясните явление. (64 %)

### Вариант 2

1. Рассеивающая линза вставлена в круглое отверстие радиусом  $R$  в непрозрачной стенке. Точечный источник света расположен в фокусе линзы. Чему равен радиус освещенной области на экран, удаленном от линзы на фокусное расстояние? (32 %)

2. В плоский конденсатор с расстоянием между пластинами  $d_0$  вставили изогнутую в середине проводящую пластину (рис. 3). Расстояния от этой пластины до ближайших обкладок  $d_1$ . Во сколько раз изменилась емкость конденсатора? (44 %)

3. Если мячик падает с высоты  $h$  на твердый пол, то он отскакивает на высоту  $h/3$ . На нитях длиной  $l$  подвешивают ряд два таких мячика. Нить с одним мячиком отклоняют на угол  $90^\circ$  от вертикали, и мячик отпускают. На какие углы отклонятся нити после соударения мячиков? (28 %)

4. Детский воздушный шарик надут водородом и свободно висит в воздухе.

Оцените толщину его растянутой резиновой оболочки. (33 %)

5. Через дно сосуда проходит трубка, закрытая пробкой. В сосуд наливают воду, накрывают его вторым сосудом и затем переворачивают эту систему. Вода из первого сосуда почти не выливается. Если же вынуть пробку из трубки, то вода из первого сосуда выливается, но не полностью (см. рис. 4). Объясните явление. (44 %)

### Вариант 3

1. Сосуд разделен подвижным поршнем на объемы  $V/3$  и  $2V/3$ , содержащие газ с температурой  $T$  (рис. 5). До какой температуры  $T_1$  нужно нагреть газ слева от поршня, чтобы отношение объемов сменилось на обратное? Справа температура газа поддерживается прежней. (80 %)

2. После упругого столкновения с покоящейся частицей массой  $M$  налетающая частица полетела под прямым углом к первоначальному направлению движения, а частица массы  $M$  — под углом  $\alpha$  к этому направлению (рис. 6). Найдите массу  $m$  налетающей частицы. (56 %)

3. Изолированную металлическую первоначально незаряженную пластину в течение времени  $t$  освещают ультрафиолетовым светом. Под его действием из пластины вылетает облако электронов, начальная скорость которых перпендикулярна пластине и равна  $v_0$ . Полное число электронов, вылетевших с единицы площади,  $n$ , заряд электрона  $e$ , его масса  $m$ . Найдите толщину облака  $h$  через время  $t$  после окончания облучения (рис. 7). (22 %)

4. Оцените силу давления света настольной лампы на стол. (30 %)

5. Световод состоит из множества круглых в сечении стеклянных волокон, собранных в пучок. Если луч лазера ввести в такой световод параллельно его оси, то выходящий из другого конца свет дает на экране пятно круглой формы. Если же вводить свет под углом к оси световода, то на экране появляется пятно в виде кольца. Объясните явление. (31 %)

Публикацию подготовили Г. Меледин, М. Фокин

## Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Сумма второго, третьего и четвертого членов убывающей арифметической прогрессии в три раза больше квадрата разности этой прогрессии. Сумма третьего и шестого ее членов равна двум. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x-2}{2x-3} \right) \geq -1.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

4. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна косинусу угла наклона боковой грани к плоскости основания, а площадь основания равна синусу этого же угла. Найдите объем пирамиды.

5. Из вершин  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  к его сторонам  $AB$  и  $AC$  соответственно проведены перпендикуляры, пересекающиеся в точке  $D$ . Найдите длину стороны  $AC$ , если известно, что угол  $ABC$  острый, угол  $BAD$  равен  $\alpha$ , а расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$  равно  $a$ .

6. Решите неравенство  $|66f(x) - 90| \leq 24$ , если известно, что уравнение  $3f(x) + x = 4$  имеет два корня, сумма которых равна  $-\frac{2}{11}$ , и функция  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = \frac{1}{2^c} (|x|^a + |x|^b)^c$ , где  $a, b, c$  — некоторые положительные числа.

#### Вариант 2

1. Найдите двузначное число, если известно, что при делении этого числа на сумму его цифр в частном получится 4 и в остатке 3, если же из искомого числа вычесть удвоенную сумму его цифр, то получится 25.

2. Найдите  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ , если известно, что  $\cos \alpha = a$ ,  $\alpha \in \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ ,

3. Решите неравенство

$$\log_2 x - 4 \log_x 2 + 3 \geq 0.$$



Рис. 1.

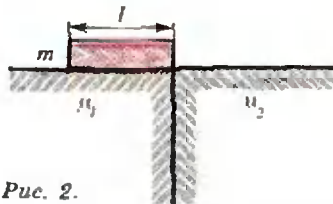


Рис. 2.



Рис. 3.

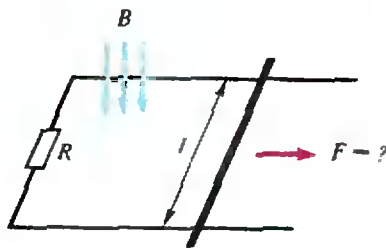


Рис. 4.

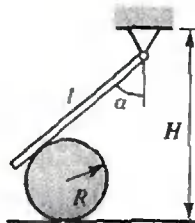


Рис. 5.



Рис. 6.

#### 4. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x-4} - \sqrt{x+5} - 6\sqrt{x-4} = 2.$$

5. В треугольнике  $ABC$  перпендикуляр, опущенный из центра описанной окружности на биссектрису угла  $B$ , проходит через точку пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Найдите величину угла  $B$ .

6. В куб вписан шар. Другой шар касается первого шара и трех граней куба. Найдите отношение объемов шаров.

### Физика

#### Письменный экзамен

##### Вариант 1

1. Два маленьких шарика массой  $m$  каждый, соединенные невесомой нерастяжимой нитью длиной  $l$ , падают с высоты  $h$  так, что нить своей средней точкой налетает на горизонтально расположенный гвоздь (рис. 1). Какой должна быть высота  $h$ , чтобы нить оборвалась, если предельно допустимое натяжение нити  $T_0$ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Брусok массой  $m$  и длиной  $l$  лежит на стыке двух столов (рис. 2). Какую работу надо совершить, чтобы брусок перетащить волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между ним и столами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно?

3. В длинной гладкой пустой теплоизолированной трубе находятся два поршня с массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 3). Пространство объемом  $V_0$  между ними заполняется одноатомным газом при давлении  $p_0$ . Поршни отпускают. Определите их максимальные скорости, если масса газа много меньше массы поршней.

4. Во сколько раз сила электрического взаимодействия между электроном и про-

тоном больше силы их гравитационного взаимодействия? Заряд электрона и протона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, масса протона  $M = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

5. Проводящая перемычка длиной  $l$  скользит в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  по проводящим рельсам, замкнутым на сопротивление  $R$  (рис. 4). Какую силу нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью  $v$ ?

6. Участок стены площадью  $S = 1$  м<sup>2</sup> освещается светом с длиной волны  $\lambda = 3310$  А. Все падающее излучение полностью поглощается, конкретно — каждую секунду поглощается  $N = 10^{24}$  с<sup>-1</sup> квантов света. Каково давление, оказываемое светом на стену? Свет падает перпендикулярно поверхности стены.

##### Вариант 2

1. На высоте  $H = 40$  см от пола к горизонтальной оси прикреплен стержень длиной  $l = 30$  см и массой  $m = 0,5$  кг (рис. 5). Стержень отклонен от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$  и касается шара радиусом  $R = 10$  см, лежащего на полу. Определите силу трения между шаром и полом и между шаром и стержнем, если вся система находится в равновесии.

2. Какова должна быть площадь плоской льдины толщиной  $h = 40$  см, чтобы удержать на воде груз массой  $m = 100$  кг? Глубина погружения льдины должна быть  $h_1 = 38$  см. Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

3. Одноатомный идеальный газ изотермически расширился из состояния с давлением  $p_1 = 10^6$  Па и объемом  $V_1 = 1$  л до состояния с вдвое большим объемом. Най-



дите внутреннюю энергию газа в конечном состоянии.

4. Три одинаковых невесомых шарика, расположенные вдоль одной прямой, соединены двумя одинаковыми пружинами жесткостью  $k$  каждая (рис. 6). Расстояние между крайними шариками  $l_0$ . Затем всем шарикам сообщили одинаковый по величине и знаку заряд, при этом расстояние между крайними шариками стало  $l$ . Найдите величину сообщенного заряда.

5. Заряженная частица проходит уско-ряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi$  и влетает в область однородного магнитного поля с индукцией  $B$  под углом  $\alpha$  к магнитным силовым линиям. Определите отношение заряда частицы к массе, если шаг спирали, по которой движется частица, равен  $h$ .

6. На пути сходящегося пучка поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F=10$  см, в результате чего лучи сошлись на расстоянии  $f=5$  см от линзы. Где пересекутся лучи, если линзу убрать?

Публикацию подготовили А. Боржаковский,  
Г. Солохина

## Московский инженерно-физический институт

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

##### 1. Решите уравнение

$$\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \cos x)} = -\sin x + 6 \cos x.$$

2. При делении натурального трехзначного числа  $A$  на произведение цифр сотен и десятков получили в частном 25 и в остатке 4, а при делении на произведение цифр десятков и единиц — в частном 12 и в остатке 14. Кроме того, известно, что число  $(A-6)$  делится на 31 без остатка, причём частное от такого деления равно произведению цифр сотен и единиц числа  $A$ . Найдите число  $A$ .

3. Найдите все значения  $a \in \mathbb{R}$ , при каждом из которых неравенство

$$1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$$

выполняется при любом действительном  $x$ .

4. Правильная треугольная пирамида  $SABC$  пересечена плоскостью, проходя-

щей через центр описанного около этой пирамиды шара параллельно ребрам  $SA$  и  $BC$ . Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что длина высоты  $SH$  пирамиды равна  $h$ , а отношение расстояния от центра шара до плоскости основания  $ABC$  пирамиды к расстоянию от центра шара до вершины  $S$  равно  $q$ .

#### Вариант 2

##### 1. Решите уравнение

$$(\cos 4x)(\sin x + 2 \cos x)^2 = 5 \cos^3 4x.$$

2. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала работал лишь первый рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Когда  $1/6$  часть всей работы была выполнена, к работе приступил третий рабочий. Закончили работу они одновременно. Известно, что на выполнение половины всей работы первому и второму рабочим, работающим совместно, требуется на 2,5 часа меньше, чем одному третьему на выполнение всей работы. Сколько времени работал первый рабочий, если первый и второй рабочие обработали по одинаковому числу деталей, а третий — в 2 раза больше каждого из них, проработав на 1 час меньше второго рабочего?

##### 3. Решите уравнение

$$\sqrt{4^x - 6 \cdot 2^x + 1} = 2^x - a, a \in \mathbb{R}.$$

4. В прямой круговой конус с вершиной  $S$  вписана треугольная пирамида  $SABC$ , у которой все боковые грани имеют одинаковую площадь. Найдите объем пирамиды  $SABC$ , если известно, что длина образующей конуса равна  $l$  и  $\angle ASB = 2\alpha$ .

### Физика

#### Устный экзамен

В 1990 году впервые из билетов вступительного экзамена были исключены чисто теоретические вопросы и вместо них предложены три сравнительно несложные задачи. Для их решения необходимы как знание основ теории, так и умение быстро и правильно пользоваться стандартными методами решения задач.

Четвертая задача билета, как и раньше, была комплексной.

Время подготовки к ответу осталось прежним (30—45 мин).

#### Билет 1

1. При изобарическом нагревании газа ему было передано количество теплоты  $Q=800$  Дж. При этом его внутренняя энергия увеличилась на  $\Delta U=700$  Дж. На сколько увеличился объем газа? Давление газа  $p=10^5$  Па.

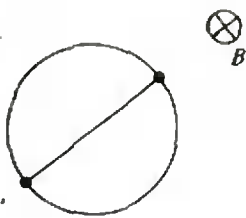


Рис. 1.

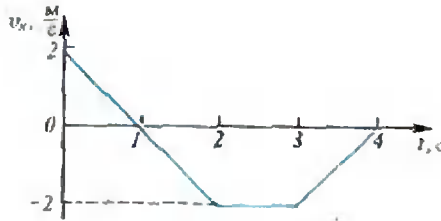


Рис. 2.

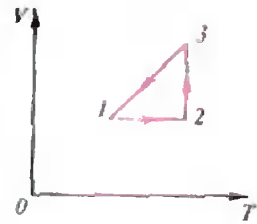


Рис. 3.



Рис. 4.

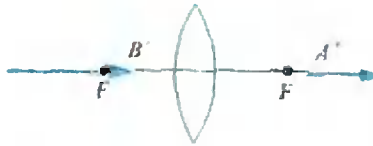


Рис. 5.

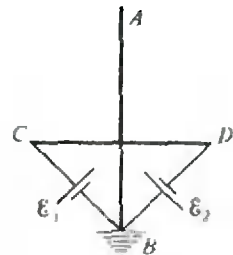


Рис. 6.

2. Определите работу выхода электрона из металла, если для прекращения фототока между пластинами из этого материала следует создать задерживающее напряжение  $U$ . Пластины облучаются светом с длиной волны  $\lambda$ .

3. На рисунке 1 показан плоский контур из тонких проводов, находящийся в однородном магнитном поле, которое направлено за плоскость рисунка (перемычка контура совпадает с диаметром кольца). Индукцию поля начали уменьшать. Укажите направление индукционных токов в контуре.

4. Тело тянут по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью  $v$  в течение времени  $t$ . При этом температура тела увеличивается на  $\Delta t$ . Считая, что вся работа внешних сил пошла на увеличение внутренней энергии тела, и пренебрегая теплоотдачей, найдите угол между силой, с которой тянут тело, и горизонтом. Удельная теплоемкость тела  $c$ , коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu$ .

### Билет 2

1. Пользуясь графиком зависимости проекции скорости от времени (рис. 2), постройте график зависимости координаты точки от времени, в начальный момент  $t=0$  координата точки  $x=0$ .

2. На  $V, T$ -диаграмме (рис. 3) показан замкнутый процесс идеального газа. Изобразите этот процесс в координатах  $p, V$ .

3. На рисунке 4 показаны: 1) область полной видимости в плоском зеркале некоторого прямого предмета  $AB$  (заштрихована прямыми линиями); 2) области час-

тичной видимости предмета в зеркале (заштрихованы волнистыми линиями). Определите расположение предмета  $AB$ .

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C_0=5 \cdot 10^{-9}$  Ф заряжен до напряжения  $U=\mathcal{E}=2$  В. Какую работу нужно совершить, чтобы, раздвигая обкладки, увеличить расстояние между ними в  $n=2$  раза? После зарядки конденсатор отключен от источника.

### Билет 3.

1. Тело массой  $m$  лежит неподвижно на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту. Укажите все силы, действующие на тело.

2. Определите давление, при котором  $V=1$  м<sup>3</sup> газа содержит  $N=2,4 \cdot 10^{26}$  молекул. Температура газа  $t=60$  °С.

3. На рисунке 5 показано изображение  $A'B'$  некоторого прямого непрерывного предмета  $AB$  в собирающей линзе. Изображение получилось состоящим из двух полубесконечных частей, одна из которых действительная, а другая — мнимая. Восстановите расположение предмета  $AB$ .

4. На заземленной в точке  $B$  высокоомный проводник  $AB$  (рис. 6) положили такой же проводник так, что в их средних точках образовался надежный контакт. К точкам  $C$  и  $B$ , а также  $D$  и  $B$  проводниками с малым сопротивлением подсоединили источники с ЭДС  $\mathcal{E}_1=4$  В и  $\mathcal{E}_2=1$  В. Определите потенциал точки  $A$ . Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Публикацию подготовили  
В. Архипов, В. Грушин, И. Мирошин,  
А. Руденко, Д. Храпченко

# Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

## Математика

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{x}{x+1} \geq 2.$$

2. Решите уравнение

$$x^2 + 2x - 9 = \sqrt{6 + 4x + 2x^2}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \operatorname{ctg} 3x.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{x+1}(-6x - 2x^2) \geq \log_{x+1}(1 - 3x).$$

5. В треугольнике  $ABC$  площадь равна  $30\sqrt{3}$ , угол  $A = 60^\circ$ . Проведена окружность с центром на  $BC$ , которая касается сторон  $AB$  и  $AC$ . Радиус этой окружности равен  $\frac{60\sqrt{3}}{23}$ . Найдите стороны треугольника  $ABC$ .

6. При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая соотношению

$$ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0.$$

#### Вариант 2

1. Решите уравнение

$$4x\sqrt{x} + 3\sqrt{x^2} - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x^2 - 2x + 2 - |x|} \leq 0.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{ctg} x = \sin 5x.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{17}(3x^2 - 21x + 18) - 2 \log_{289} x \leq 1 + \frac{1}{\log_2 17}$$

5. В треугольнике  $ABC$  касательная к вписанной окружности, параллельная  $BC$ , пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$ , причем  $MN = 13/14$ . Найдите отрезки, на которые сторону  $BC$  делит вписанная окружность, если  $BC = 13$ , а  $\angle A = 120^\circ$ .

6. Угол на плоскости образован прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , имеющими уравнения

$y = 0$  и  $y = -x + 1$ . В точках  $B_1(0; \frac{1}{2})$  и

$B_2(\frac{2}{3}; \frac{1}{6})$  находятся шарики. При уда-

ре шарик  $B_1$ , отразившись от  $l_2$ , затем от  $l_1$  и затем снова от  $l_2$ , попал в шарик  $B_2$ . Найдите координаты точки второго отражения шарика от прямой  $l_2$ .

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. Доска массой  $M$  может двигаться без трения по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. С каким ускорением должна бежать по доске собака массой  $m$ , чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

2. Лодка длиной  $l$  и массой  $M$  стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки стоят два рыбака, массы которых  $M_1$  и  $M_2$ . На сколько сместится лодка, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

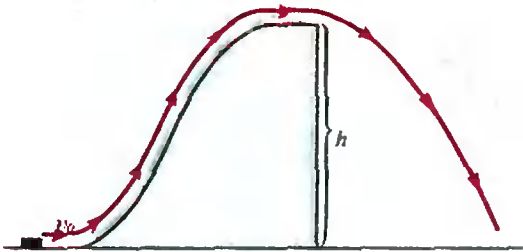
3. Шайба, скользящая по горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0 = 20$  м/с, поднимается на трамплин высотой  $h = 10$  м, верхняя часть которого горизонтальна, и соскальзывает с него в воздух (см. рисунок). Чему равна дальность полета шайбы в воздухе?

4. Воздух находится в открытом сверху вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m = 20$  кг и сечением  $S = 20$  см<sup>2</sup>. После того как сосуд стали двигать вверх с ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>, высота столба воздуха между поршнем и дном сосуда уменьшилась на 20%. Считая температуру постоянной, найдите по этим данным атмосферное давление. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

5. Смешали  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup> воздуха с влажностью  $\varphi_1 = 20\%$  и  $V_2 = 2$  м<sup>3</sup> воздуха с влажностью  $\varphi_2 = 30\%$ , имеющих одинаковую температуру. Определите влажность образовавшейся смеси, если она занимает объем  $V = 3$  м.

6. Протон, летящий в направлении ядра атома гелия, на очень большом расстоянии от него имеет скорость  $v = 2 \cdot 10^4$  м/с. На какое расстояние сможет приблизиться протон к ядру? Масса протона  $m = 1,67 \times 10^{-27}$  кг, масса ядра атома гелия  $M = 6,68 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд протона  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  Кл.

7. При электролизе раствора  $H_2SO_4$  с сопротивлением  $r = 0,4$  Ом за время  $\tau = 30$  мин выделилось  $V = 3,3$  л водорода



(при нормальных условиях). Определите мощность, израсходованную на нагревание электролита. Число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  1/моль, величина элементарного заряда  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

8. Ионы, ускоренные напряжением  $U = 10$  кВ, попадают через щель в магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл перпендикулярно линиям вектора магнитной индукции. В магнитном поле ионы движутся по дуге окружности и, совершив половину оборота, попадают на фотопластинку. На каком расстоянии друг от друга будут находиться следы, образованные однозарядными ионами водорода и гелия? Заряды ионов  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, массы ионов  $m_1 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и  $m_2 = 6,68 \times 10^{-27}$  кг соответственно.

9. Самолет летит горизонтально со скоростью  $v = 720$  км/ч. Чему равна разность потенциалов, возникающая между концами крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B_v = 50$  мкТл? Размах крыльев самолета  $l = 20$  м. Чему равна максимальная ЭДС, которая может возникнуть при полете самолета, если горизонтальная составляющая поля Земли  $B_h = 20$  мкТл? Как должен лететь при этом самолет?

10. На рассеивающую линзу падает цилиндрический пучок лучей, параллельных оптической оси; диаметр пучка  $a = 5$  см. За линзой на расстоянии  $l = 10$  см поставлен экран, на котором получается круглое световое пятно диаметром  $b = 25$  см. Определите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили С. Бенеславский, В. Варфоломеев, А. Кигулько, М. Крисеников, И. Матусевич, В. Сорокин

## Московский институт стали и сплавов

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

(факультет информатики и экономики)

1. Упростите выражение и вычислите его значение при  $a = 5$

$$\left(a^4 + 1\right)\left(a^3 + a^2 + a + 1\right)^{-1} \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1}$$

2. Найдите количество целых чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2 - 5x - 35} > 1,8.$$

3. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

4. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+3y-9} + \sqrt{2y-x+11} = 3, \\ \sqrt{2y-x+11} - \sqrt{3y+x-9} = 3. \end{cases}$$

5. Первоначальная стоимость единицы продукции равнялась 75 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной стоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 72 руб. Определите проценты повышения и понижения стоимости единицы продукции.

6. К кривой  $y = 3x^2 - 8x + 1$  проведена касательная параллельно прямой  $4x + 2y - 1 = 0$ . Найдите ординату точки касания.

7. Вычислите без таблиц

$$\operatorname{ctg} 80^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \times \operatorname{ctg} 80^\circ.$$

8. Решите уравнение

$$\frac{1}{\log_2(x+1)} - \frac{\log_2(6-x)}{\log_2(x+1)} = 1.$$

9. Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 4.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

10. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

11. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом  $30^\circ$ . Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите объем пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен  $\sqrt{3}$ .

12. Найдите сумму всех целочисленных значений параметра  $a$ , при которых квадратный трехчлен  $x^2 + 2ax + a^2 + 4a$  отрицателен при всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $1 < x < 3$ .

**Вариант 2**

(факультеты металлургии черных металлов и сплавов, цветных, редких металлов и сплавов, технологический)

1. Найдите ординату вершины параболы  $y = 2(x+1)(x+3)$ .

2. Найдите меньший из корней уравнения

$$2x^2 + 10x = 0,5^9.$$

3. Вычислите без таблиц

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{5\pi}{2} + \arccos 0,8 \right).$$

4. Упростите выражение

$$\left( \left( \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{\frac{a}{2} + b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} - \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{-2} \right) : \frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}.$$

5. Решите уравнение

$$x^2 - 7x + \sqrt{x^2 - 7x + 8} = 12.$$

В ответе запишите произведение его корней.

6. Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии, если разность между седьмым и третьим членами равна 8, произведение второго и седьмого членов равно 75, причем известно, что все члены прогрессии положительны.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$x^4 - 8x^2 + 7.$$

8. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника на 3 больше длины другого катета. Найдите длину большего катета, если площадь треугольника равна 9.

9. В тонне руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 400 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Сколько килограммов железа осталось в руде после удаления указанных 400 кг примесей?

10. Найдите сумму корней уравнения (в градусах)

$$\cos 4x \cos (\pi + 2x) - \sin 2x \cos \left( \frac{\pi}{2} - 4x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x,$$

принадлежащих отрезку  $[0; \pi]$ .

11. Найдите длину промежутка, являющегося множеством решений неравенства

$$\log_{x+3} 0,5 > 0,5.$$

12. Одна из вершин куба и центры его граней, не содержащие эту вершину, служат вершинами пирамиды. Найдите ее объем, если сторона куба равна 3.

**Физика**

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Тело массой  $m = 150$  кг движется равномерно по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы, направленной под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu = 0,33$ . Определите работу по перемещению тела на расстояние  $l = 71,5$  м.

2. Деревянный брусок высотой  $h = 10$  см с площадью основания  $S = 400$  см<sup>2</sup> плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду и отпустили. Найдите частоту колебаний бруска. Силу трения не учитывать. Плотность дерева  $\rho = 0,8$  г/см<sup>3</sup>.

3. Какой путь пройдут санки по горизонтальной поверхности после спуска с горы высотой  $h = 25$  м, имеющей наклон  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту? Коэффициент трения не меняется на всем пути и равен  $\mu = 0,25$ .

4. При разрушении вращающейся части машины осколки могут отлететь под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $v = 3$  м/с. Какой минимальной высоты надо поставить ограждение на расстоянии  $l = 0,5$  м от машины, чтобы осколки не вылетели за пределы ограждения?

5. Воздух, находящийся при температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , имеет влажность 100 %. При этом давление насыщенного пара  $p_{н1} = 2330$  Па. Какое количество росы (в граммах) выпадет из  $V = 1$  м<sup>3</sup> воздуха, если его охладить до температуры  $t_2 = 17^\circ\text{C}$ , при которой давление насыщенного пара  $p_{н2} = 1962$  Па? Охлаждение водяного пара считать изохорическим.

6. Определите плотность смеси, состоящей из  $m_1 = 8$  г водорода и  $m_2 = 64$  г кислорода, при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$  и давлении  $p = 101$  кПа.

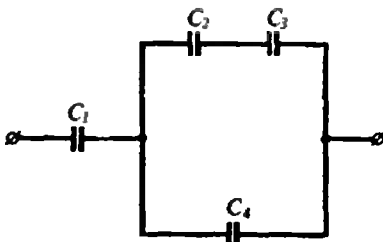


Рис. 1.

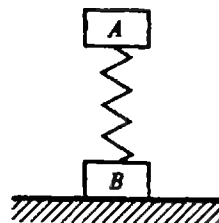


Рис. 2.

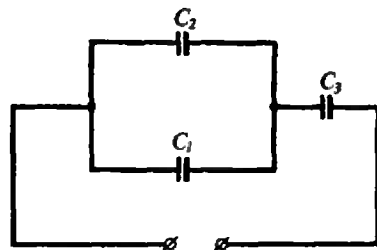


Рис. 3.

7. Чему равно внутреннее сопротивление одного источника тока, если при включении восьми таких источников двумя параллельными группами по четыре источника, соединенных последовательно в каждой группе, на нагрузочном сопротивлении  $R=3 \text{ Ом}$  выделяется такая же мощность, как в случае последовательного соединения всех восьми элементов?

8. Заряженные шарики находятся на расстоянии  $r=0,5 \text{ м}$  друг от друга и отталкиваются с силой  $F=3,24 \text{ Н}$ . Общий заряд шариков  $q=5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ . Найдите разность между большим и меньшим зарядами шариков.

9. Конденсаторы соединены по схеме, указанной на рисунке 1:  $C_1=C_2=2 \text{ мкФ}$ ,  $C_3=3 \text{ мкФ}$ ,  $C_4=1 \text{ мкФ}$ . Напряжение на обкладках конденсатора емкостью  $C_4$  равно  $U=200 \text{ В}$ . Определите напряжение на всей батарее конденсаторов.

10. Определите угол между отраженным и преломленным лучами, если угол падения  $\alpha$  луча на границу двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  удовлетворяет условию  $\text{tg}\alpha=n_2/n_1$ .

#### Вариант 2

1. Тело  $A$  массой  $m_1=1 \text{ кг}$  и тело  $B$  массой  $m_2=4,1 \text{ кг}$  соединены между собой пружиной, как показано на рисунке 2. Тело  $A$  совершает свободные гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой  $x_m=1,6 \text{ см}$  и циклической частотой  $\omega=2,5 \text{ с}^{-1}$ . Пренебрегая массой пружины, найдите наибольшую силу давления этих двух тел на опорную горизонтальную плоскость.

2. С башни высотой  $h=25 \text{ м}$  брошен горизонтально камень массой  $m=0,2 \text{ кг}$  со скоростью  $v_0=15 \text{ м/с}$ . Найдите кинетическую энергию камня через  $t=1 \text{ с}$  после начала движения.

3. Два груза, массы которых  $m_1=1 \text{ кг}$  и  $m_2=2 \text{ кг}$ , связаны перекинутой через неподвижный блок нитью. В начальный

момент времени оба груза были неподвижны и второй груз находился выше первого на  $h=1 \text{ м}$ . Через какое время после начала движения грузы будут находиться на одинаковой высоте?

4. Каким должен был бы быть период обращения Земли вокруг своей оси, чтобы тела на экваторе находились в состоянии невесомости?

5. Сколько молекул содержится в объеме  $V=1 \text{ мм}^3$  газа при температуре  $t=27 \text{ }^\circ\text{C}$  и давлении  $p=10^{-11} \text{ мм рт. ст.}$

6. Один моль кислорода при температуре  $t=0 \text{ }^\circ\text{C}$  нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем увеличился в два раза? Удельная теплоемкость кислорода при указанных условиях равна  $c_p=0,92 \text{ кДж/(К} \cdot \text{кг)}$ .

7. Во сколько раз увеличится разность потенциалов на обкладках конденсатора емкостью  $C_3$  (рис. 3) при пробое конденсатора емкостью  $C_2$ , если  $C_1=200 \text{ пФ}$ ,  $C_2=600 \text{ пФ}$ ,  $C_3=800 \text{ пФ}$ ?

8. Батарейка для карманного фонаря имеет ЭДС  $\mathcal{E}=4 \text{ В}$  и внутреннее сопротивление  $r=2 \text{ Ом}$ . Сколько таких батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу мощностью  $P=60 \text{ Вт}$ , рассчитанную на напряжение  $U=120 \text{ В}$ ?

9. Определите абсолютную величину ЭДС индукции, возникающей в прямом проводнике длиной  $l=0,4 \text{ м}$ , пересекающем магнитное поле с индукцией  $B=1 \text{ Тл}$  под углом  $\alpha=60^\circ$  к линиям магнитной индукции со скоростью  $v=0,6 \text{ м/с}$ .

10. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч света падает из воздуха на одну из граней призмы перпендикулярно ей. Найдите угол между лучом, выходящим из призмы, и продолжением луча, падающего на призму. Показатель преломления стекла  $n=1,5$ .

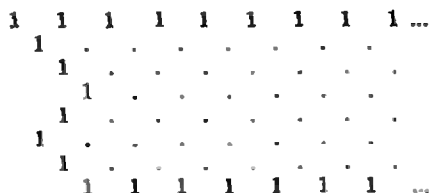
Публикацию подготовили  
В. Башкиров, Г. Левшина, Б. Разумейко

# Игра и головоломки

## Числовые фриззы

Дж. КОНВЕЙ

Вот простенькая арифметическая игра. Напишите два ряда единиц и соедините их зигзагом из единиц, как в приводимом примере (точками отмечены места, куда в дальнейшем будут вписываться числа):



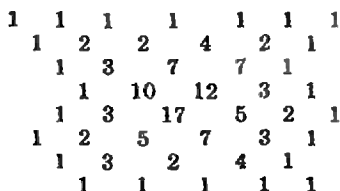
А теперь начните заполнять пустые места по «правилу ромба»: для четырех соседних чисел, расположенных ромбом, —

$$\begin{matrix} & C & \\ Z & & B \\ & Ю & \end{matrix}$$

произведение  $Z \cdot B$  на 1 больше  $C \cdot Ю$ , т. е.

$$B = (C \cdot Ю + 1) / Z.$$

Вот что получится в нашем примере:



Попробуйте и другие зигзаги. Вы обнаружите несколько любопытных закономерностей.

1. Все деления выполняются нацело, т. е. все числа в таблице будут натуральными.

2. В каждой строчке вновь появляется единица.

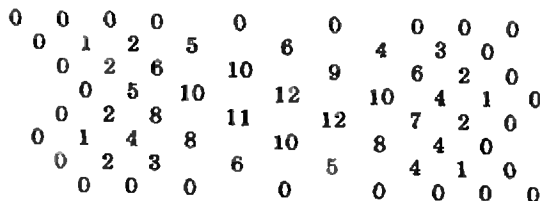
3. После этого строчки можно не продолжать, потому что новые единицы образуют точно такой же зигзаг, как тот, с которого вы начали, только перевернутый вверх ногами, так что полная таблица будет периодической:



Можете ли вы это объяснить?

Нечто похожее происходит и если умножение заменить сложением. На этот раз надо начать с двух рядов нулей, соединенных зигзагом из нулей, а ромбики достраивать по правилу  $B + Z = (C + Ю) + 1$ , или  $B = (C + Ю + 1) - Z$ .

На сей раз, конечно, во всех строках высказывают нули:



Можете ли вы объяснить, почему числа здесь не становятся отрицательными, почему строки заканчиваются нулями и почему эти нули образуют точную (не перевернутую) копию исходного зигзага?

Если отказаться от зигзага из единиц, соединяющего крайние ряды, можно все равно наткнуться на интересные узоры. Например, на мультипликативные фриззы\*, в которых каж-

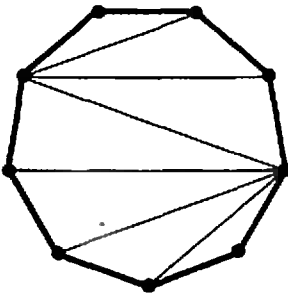
\* Мультипликативный — значит связанный с умножением (в данном случае, по правилу ромба), фриззом или бордюром называют периодически повторяющийся рисунок на бесконечной полосе.

дый ряд состоит из одинаковых положительных чисел:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \text{или} & & & & & & \\
 1 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1 \\
 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 1
 \end{array}$$

Вы видите, что числа здесь уже не целые. Что же это за числа? Подсказка: ответ связан с многоугольниками.

Мультипликативные фризы из натуральных чисел тоже связаны с многоугольниками. Как? Вторая подсказка: многоугольник для самого первого нашего примера выглядит так:



От редакции. Этой статьей мы открываем публикацию переводов из «Квантума» — советско-американского журнала, который можно назвать младшим братом «Кванта». Он начал издаваться в США в начале прошлого года, а в этом месяце подписчики

получат уже 6-й номер. Пока бóльшую часть его материалов составляют переводы статей из «Кванта», но предполагается увеличение американской доли, и мы собираемся знакомить наших читателей со всеми наиболее интересными статьями американских авторов. К ним, безусловно, относятся заметки под рубрикой «Математические сюрпризы», которую ведет в «Квантуме» человек, наверняка знакомый читателям «Кванта», — профессор Принстонского университета Джон Конвей. Его имя появлялось на страницах нашего журнала совсем недавно (см. заметку «Кубики МакМагона и таблица Конвея» в «Кванте» № 12 за 1990 год), не раз встречались мы с ним и раньше, скажем, он придумал игру «жизнь», ставшую знаменитой благодаря книгам Мартина Гарднера.

Мы не сомневаемся, что числовые фризы увлекут многих наших читателей и дадут материал для самостоятельных исследований. О фризах упоминается и в книге Гарднера «Крестики-нолики» (М., Мир, 1988, с. 228), где можно найти литературные ссылки. В «Кванте» тоже встречались числовые узоры, получающиеся по правилу ромба, — см. задачу M1209, решение которой опубликовано в 7-м номере за прошлый год. Мы надеемся получить от вас письма с ответами на вопросы, поставленные Конвеем, и тогда вновь вернуться к числовым фризам.

*Публикацию подготовил В. Дубровский*



**Ответы,  
указания,  
решения**

**Избранные школьные задачи по физике**

1. Очевидно, что модуль уравновешивающей силы  $F$  равен разности модулей действующих на стержень сил:

$$F = F_2 - F_1 = 15 \text{ Н.}$$

Ясно также, что точка приложения уравновешивающей  $F$  лежит на прямой, соединяющей точки приложения сил  $F_1$  и  $F_2$ , справа от большей силы (рис. 1). Обозначим искомое расстояние через  $x$ . Тогда по правилу моментов получаем

$$F_1(l+x) - F_2x = 0,$$

и

$$x = F_1 l / (F_2 - F_1) = 1 \text{ м.}$$

Заметим, что в случае  $F_1 = F_2$ , т. е. когда на тело действует так называемая пара сил, уравновешивающей силы, в обычном смысле этого слова, нет. Под действием пары сил тело приходит во вращательное движение вокруг его центра тяжести.

2. Силы, действующие на катушку, изображены на рисунке 2. Запишем условия равновесия катушки в виде

$$\begin{aligned} N - T \sin \alpha &= 0, \\ Tr - F_{\text{тр}} R &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , получаем

$$\sin \alpha = \frac{r}{\mu R} = \frac{1}{2}, \text{ и } \alpha = 30^\circ.$$

3. Заменяем два маленьких шарика одним, находящимся посередине между ними и обладающим массой  $2m$ . Тогда центр масс системы трех шариков лежит на середине биссектрисы угла, в вершине которого находится шарик массой  $2m$ .

4. Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести пластинки лежит на ее оси на некотором расстоянии  $x$  от центра круга. Если вложить обратно вырезанную часть пластинки, то центр тяжести пластинки сместится в ее центр. Запишем соответствующее правило моментов (см. рис. 3):

$$m_1 g x - m_2 g R / 2 = 0.$$

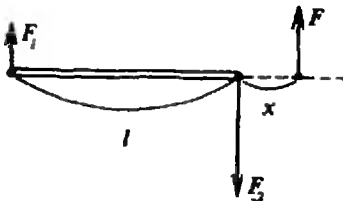


Рис. 1.

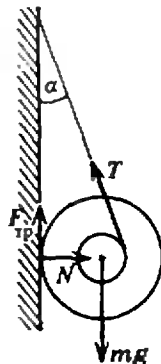


Рис. 2.

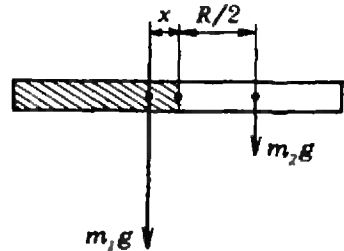


Рис. 3.

Но

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2 - R^2/4}{R^2/4} = 3,$$

поэтому получаем

$$3x = R/2, \text{ и } x = R/6.$$

5. На опущенный в воду палец действует выталкивающая сила. Согласно третьему закону Ньютона, такая же по величине, но противоположная по направлению сила действует на воду и через нее — на дно сосуда. Следовательно, сосуд с водой перевесит, т. е. равновесие нарушится.

6. Сопротивление резистора, рассчитанное по схеме а), больше истинного на величину сопротивления амперметра. Поэтому погрешность измерения равна

$$\delta = \frac{\Delta R}{R} = \frac{R_A}{R}, \delta_1 = 10 \%, \delta_2 = 0,02 \%.$$

Сопротивление, рассчитанное по схеме б), меньше истинного на величину  $R - RR_A / (R + R_A)$ . В этом случае погрешность измерения равна

$$\delta = \frac{R}{R + R_A}, \delta_1 \approx 0,1 \%, \delta_2 \approx 33 \%.$$

Таким образом, для измерения малых сопротивлений лучше пользоваться схемой б), а для измерения больших сопротивлений — схемой а).

7. См. рис. 4.

8. В первом случае по цепи течет ток  $I = 2\mathcal{E} / (2r) = \mathcal{E} / r$ . Разность потенциалов между точками А и В равна

$$U = \mathcal{E} - Ir = 0.$$

Во втором случае ток в цепи отсутствует, поэтому

$$U = \mathcal{E}.$$

9. Мощность источника, равная произведению тока в линии на напряжение, должна быть на 10 % больше потребляемой мощности:

$$IU = 1,1P.$$

Потери мощности в линии передачи равны

$$I^2 R = 0,1P.$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{0,1U^2}{(1,1)^2 P} \approx 9 \text{ Ом.}$$

10. Согласно закону сохранения энергии, механическая работа равна разности энергии, потребляемой электромотором от батареи, и тепловой энергии, теряемой в его обмотке:

$$A = \mathcal{E} I_1 t - I_1^2 r t.$$

Сопротивление обмотки  $r$  найдем тоже из закона сохранения энергии, но записанного для случая полного затормаживания якоря:

$$0 = \mathcal{E} I_2 t - I_2^2 r t.$$

Таким образом,

$$A = \mathcal{E} I_1 (1 - I_1/I_2) t = 8 \text{ Дж.}$$

11. Из формулы зависимости массы от скорости

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

получаем

$$v/c = \sqrt{1 - (m_0/m)^2} = 0,6 = 60 \%.$$

12. Из первой ядерной реакции



следует, что первая неизвестная частица не имеет электрического заряда. Значит, это нейтрон:

$$x = {}^1_0\text{n}.$$

Тогда из первой же реакции получаем, что

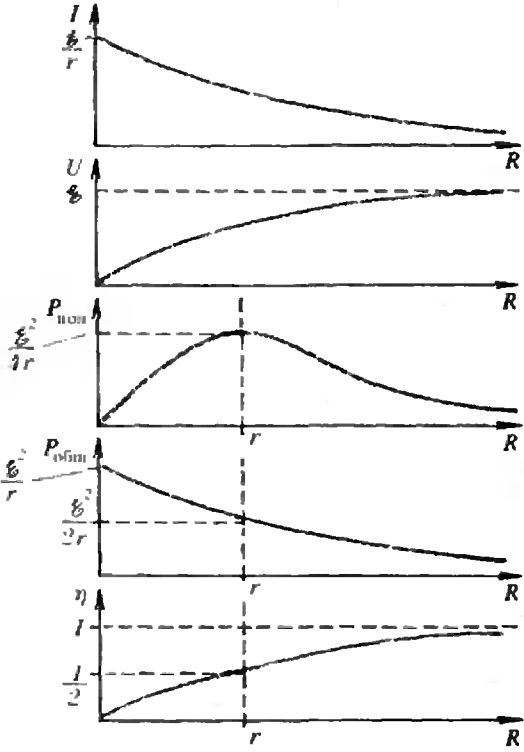


Рис. 4.

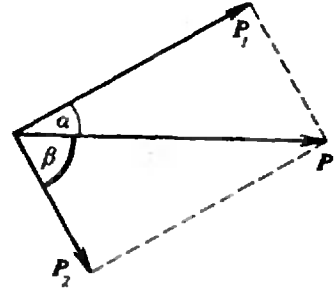
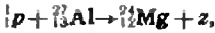


Рис. 5.

вторая неизвестная частица — протон:

$$y = {}^1_1\text{p}.$$

Остается записать вторую ядерную реакцию:



откуда находим

$$z = \frac{1}{2}\alpha.$$

13. Запишем для замкнутой системы «л-мезон — два фотона» законы сохранения энергии и импульса (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2/c \\ P &= P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta, \\ 0 &= P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $E = mc^2$ ,  $P = mv$ ,  $P_1 = E_1/c$  и  $P_2 = E_2/c$ , найдем искомую скорость  $v$  мезона (массой  $m$ ):

$$v = c \sin(\alpha + \beta) / (\sin \alpha + \sin \beta) \approx 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

14. Обозначим изменение внутренней энергии атома водорода через  $\Delta E$ . Тогда длина волны фотона, который может излучить атом, возвращаясь в невозбужденное состояние, будет равна

$$\lambda = hc / \Delta E.$$

Теперь воспользуемся законами сохранения импульса и энергии для процесса столкновения атома водорода с протоном:

$$\begin{aligned} mv_0 &= mv_1 + Mv, \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \Delta E. \end{aligned}$$

Поскольку масса протона  $m$  практически равна массе атома водорода  $M$ , получим

$$\Delta E = mv_1(v_0 - v_1),$$

и

$$\lambda = hc / (mv_1(v_0 - v_1)) \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

15. Энергия, выделяемая при данной ядерной реакции, равна разности энергии связи ядра гелия и суммарной энергии связи ядер дейтерия и трития:

$$\begin{aligned} E &= (2m_p + 2m_n - m_{\text{He}})c^2 - \\ &\quad - (2m_p + 3m_n - m_{\text{D}} - m_{\text{T}})c^2 = \\ &= (m_{\text{He}} + m_{\text{D}} + m_{\text{T}} - m_{\text{He}} - m_{\text{D}} - m_{\text{T}})c^2 = \\ &= (2,01355 + 3,01550 - 4,00159 - 1,00866) \times \\ &\quad \times 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} / 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ МэВ} \approx \\ &\quad \approx 17,7 \text{ МэВ.} \end{aligned}$$

сибирский государственный  
университет им. Ленинского комсомола

## Математика

### Вариант 1

- (4; 1).
- $\arccos(-1/4)$ .
- 25/4. Указание. Из прямоугольных треугольников  $ACH$  и  $BCH$  найдем, что  $AH=9$ ,  $BH=5$ . Затем из подобия треугольников  $HBM$  и  $ABC$  получаем  $BM=65/14$  и  $NH=117/14$ . Осталось найти  $BD$  из подобия треугольников  $DHN$  и  $DBM$ .
- $(-\infty; -(1+\sqrt{3})/2) \cup (-1; (\sqrt{3}-1)/2) \cup [1; +\infty)$ .
- $5a\sqrt{2}$ . Указание. Пусть  $P'$  и  $O'$  — соответственно проекции точек  $P$  и  $O$  на плоскость  $ABB'A'$ . Поскольку  $O$  — середина  $PQ$  и  $OO'=2a$ , то  $PP'=4a$ , но тогда  $PP'=2B'C'$ , и, значит,  $P'B'=B'B$ . Рассмотрите теперь треугольник  $QBP'$ , лежащий в плоскости грани  $ABB'A'$ . В этом треугольнике  $QB'$  и  $BO'$  — медианы. Их точка пересечения и совпадает с центром  $K$  грани  $ABB'A'$ . Отсюда  $BO'=3BK/2=3a\sqrt{2}/2$ . Далее получим, что  $P'O'= \sqrt{3}a/2$ , а затем находим  $PQ$ .

### Вариант 2

- $\arctg 5 + \pi$ ,  $-\arctg 1/2 + \pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- $(-\infty; -4 + 4\sqrt{2}) \cup (8; +\infty)$ .
- $2(\sqrt{3}-1)R/3$ . Указание. Пусть  $O$  — центр данной окружности,  $O'$  — искомой. Если радиус искомой окружности равен  $x$ , то  $OO'=R-x$ . Треугольник  $AOC$  — правильный (убедитесь в этом). Поскольку  $AO'$  — биссектриса угла  $OAC$ , найдем  $AO'=2x$ . Уравнение для определения  $x$  получим, записав теорему косинусов для треугольника  $AOO'$ .
36. Указание. Если  $(x_1; y_1)$  — координаты точки касания, то  $y'(x_1)=x_1+1=6$ .
- $27\sqrt{6}/2$ . Указание. Пусть  $M$ ,  $K$  и  $N$  — точки пересечения секущей плоскости соответственно с ребрами  $SD$ ,  $SC$  и  $SB$ , а  $M'$ ,  $K'$  и  $N'$  их проекции на плоскость основания  $ABCD$ . Тогда  $BN'=DM'=BD/6$ ,  $CK'=CA/4$ . Площадь четырехугольника  $AM'K'N'$  равна  $9\cos 60^\circ=9/2$ . Отсюда находим сторону основания, а затем и высоту пирамиды.

### Вариант 3

- $2^3+2\sqrt{3}$ ;  $2^3-2\sqrt{3}$ . Указание. Выполните замену  $y=\log_2 x$ .
- $\pi + \arcsin 1/3$ .
- 31/2 и 17/2. Указание. Пусть  $K$ ,  $L$  и  $M$ ,  $N$  — соответственно точки касания  $l_1$  и  $l_2$  с окружностями  $O_1$  и  $O_2$ , по условию  $KL=24$ ,  $MN=7$ . Если  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы  $O_1$  и  $O_2$  (для определенности пусть  $r_1 \geq r_2$ ), то, опуская перпендикуляры  $O_2P$  на  $O_1K$  и  $O_1Q$  на  $O_2N$  и учитывая, что  $O_1O_2=r_1+r_2+1$ , получите из прямоугольных треугольников  $O_1PO_2$  и  $O_1QO_2$  два уравнения для определения  $r_1$  и  $r_2$ :  $4r_1r_2+2(r_1+r_2)=575$ ,  $r_1+r_2=24$ .
- $\{-22/3; -4\} \cup (1; +\infty)$ .
- 3/4. Указание. Центр  $O$  сферы лежит в плоскости  $AA'K$ . Пусть  $P$  и  $N$  — точки касания

сферы с плоскостью основания  $ABC$  и прямой  $A'K$  соответственно,  $L$  — точка пересечения прямой  $KA'$  с основанием. Покажите, что если искомый радиус  $R$ , то  $AP=2R$ . В то же время  $LO$  — биссектриса острого угла прямоугольного треугольника  $AA'L$ . Пусть  $\angle ALA'=2\alpha$ , тогда  $\cos 2\alpha=3/5$ ,  $\operatorname{tg} \alpha=1/2$  и  $PL=AP=2R$ .

## Физика

### Вариант 1

1. Напряженность поля в точке  $O$  от одного кольца равна  $E$  и направлена вдоль оси. Тогда от перпендикулярных колец напряженность в точке  $O$  равна  $\sqrt{2}E$ , а от совмещенных —  $2E$ , т. е. она увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз.  
2. За время  $t$  самолет пройдет путь  $S_0S_1=ut$  (рис. 6), а звук —  $S_0^*S_1=S_0AS_1=vt$ , где  $S_0^*$  — изображение точки  $S_0$ . Отсюда

$$\cos \alpha = ut/(vt), \quad \alpha = \arccos(u/v).$$

3. Пусть скорость пушки после выстрела  $V$ , горизонтальная скорость снаряда  $v$ , а вертикальная  $u$ . Если пушка не закреплена, то по закону сохранения импульса  $v=V$ . Так как угол наклона ствола пушки  $45^\circ$  и относительно нее горизонтальная составляющая скорости равна вертикальной, то  $v+V=u$ . Таким образом,  $u=2V$ . Для закрепленной пушки  $v'=u'$  (подчеркнем, что  $u' \neq u$ ). Энергия сжатой пружины в обоих случаях одинакова, поэтому из закона сохранения энергии

$$m(v^2+u^2)/2 + mV^2/2 = mv'^2/2 + mu'^2/2,$$

подставляя  $u^2=4V^2$ ,  $v^2=V^2$  и  $v'^2=u'^2$ , получаем  $u'^2=3V^2$ . Так как высота подъема снаряда  $h=u^2/(2g)$ , то отношение высот

$$h/h' = (u/u')^2 = 4/3.$$

4. Груз, помещенный в центр масс корабля, движущегося по круговой орбите, будет находиться в состоянии невесомости, когда  $m\omega^2 r = GmM_3/r^2$ . Чем дальше от центра масс находится груз, подвешенный на пружине, тем большая сила необходима для удержания этого груза в положении равновесия и тем сильнее, следовательно, растягивается пружина. Пусть груз находится на предельном расстоянии  $h$  — у стенки. Тогда по второму закону Ньютона

$$m\omega^2(r+h) = \frac{GmM_3}{(r+h)^2} + T.$$

С учетом предыдущего получаем

$$T = m\omega^2(h+r) - \frac{m\omega^2 r}{(1+h/r)^2} \approx \\ \approx m\omega^2(h+r) - m\omega^2 r(1-2h/r) = 3m\omega^2 h.$$

Так как  $m\omega^2 R_3 = mg$ , то  $T \sim 3mgh/R_3$ . Полагая  $R_3 \approx 6 \cdot 10^3$  м,  $h \sim 2$  м,  $m=1$  кг, находим

$$T \sim 10^{-5} \text{ Н}.$$

5. Если прикоснуться сухой тряпкой (или совсем не прикасаться) к области, на которую падает преломленный на торце луч света, то он может испытать (в опыте так и происходит) полное внутреннее отражение от границы орг-

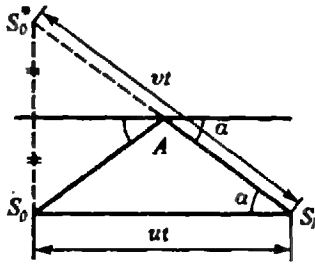


Рис. 6.

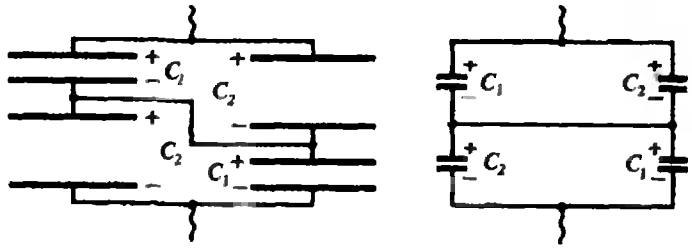


Рис. 7.

стекло — воздух и идти дальше почти без потерь. Если же прикоснуться мокрой тряпкой, то свет уже не испытает полного внутреннего отражения, а в значительной степени выйдет через грань наружу и поглотится в тряпке. Сильно ослабленный пучок света создаст едва заметное пятно на экране.

**Вариант 2**

1.  $R_c = 3R$ .

2. Нарисовав эквивалентные схемы (рис. 7), получаем, что изменившаяся емкость

$$C_x = (C_1 + C_2)/2, \text{ где } C_1 = \epsilon_0 S / (2d_0), \\ C_2 = \epsilon_0 S / (2(d_0 - d_1)).$$

Начальная же емкость была

$$C_0 = \epsilon_0 S / (d_0).$$

Таким образом, емкость увеличилась в

$$C_x / C_0 = d_0^2 / (4d_1(d_0 - d_1)) \text{ раз.}$$

3. По условию, отношение энергий мячика после отскока и до него равно 1/3. В системе центра масс удар мячика о мячик происходит как удар мячика о твердую стенку, после которого остается лишь треть от энергии до удара, т. е. скорость уменьшается в  $\sqrt{3}$  раз. В этой же системе отсчета скорость до удара равна  $1/2\sqrt{2gl}$ , а после удара —  $\sqrt{gl}/6$ . В начальной системе отсчета скорости мячиков после соударения равны

$$v_{1,2} = \pm u + 1/2\sqrt{2gl} = \sqrt{gl}/2 (1 \pm 1/\sqrt{3}).$$

Отсюда находим искомые углы отклонения

$$\varphi_{1,2} = \arccos(1 - v_{1,2}^2 / (2gl)) = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(знак + — для налетающего мячика).

4. Введя радиус шарика  $R$ , плотность воздуха  $\rho_a$ , водорода  $\rho_{H_2}$  и резины  $\rho_p$ , а также толщину оболочки  $\delta$ , по условию равновесия имеем

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{H_2} + 4\pi R^2 \delta \rho_p \sim 4\pi R^2 \delta \rho_p.$$

Отсюда при  $R = 20$  см,  $\rho_a \sim 1.3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_p \sim 1$  г/см<sup>3</sup> получаем

$$\delta \sim R \rho_a / (3\rho_p) \sim 0,1 \text{ мм.}$$

5. При переворачивании системы с закрытой трубкой разрежение над водой не дает ей вылиться. После вынимания пробки давление над

водой в трубке — атмосферное; вода полностью выливается из трубки и частично из сосуда, куда пузырями входит воздух. В широком сосуде уровень воды достигает конца трубки (так как и там и там — атмосферное давление).

**Вариант 3**

1.  $T_1 = 4T$ .

2. Из закона сохранения импульса (обозначив скорость налетающей частицы до удара  $v$ , после ее рассеяния  $u$ , а для частицы с массой  $M$  после удара —  $V$ )

$$MV \sin \alpha = mu, \quad MV \cos \alpha = mv$$

и закона сохранения энергии

$$mv^2/2 = mu^2/2 + MV^2/2$$

находим

$$m = M \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = M \cos 2\alpha.$$

3. Облако и пластина образуют плоский конденсатор с полем напряженностью  $E = en/\epsilon_0$ . На верхней границе облака скорость электронов  $v_0$ , а на нижней они имеют ускорение  $a = eE/m = e^2 n / (m\epsilon_0)$ . К моменту времени  $t$  верхние электроны пройдут путь  $h_1 = v_0(t + \tau)$ , а нижние —  $h_2 = v_0 t - at^2/2$ , отсюда искомая толщина облака

$$h = h_2 - h_1 = v_0 \tau + \frac{e^2 n t^2}{2m\epsilon_0} \text{ при } t < \frac{2v_0}{a}.$$

Через время  $t_0 = 2v_0/a$  нижние электроны начнут возвращаться на пластину, а верхние не изменят свое движение, поэтому при  $t \geq 2v_0/a$   $h = v_0(t + \tau)$ .

4. Пусть мощность лампочки  $P$ , скорость света  $c$ , тогда  $F \sim \eta P/c$ , где коэффициент  $\eta$  учитывает, что не все фотоны попадают на стол, некоторая часть света падает на стол под углом, свет лишь частично поглощается столом. Положив  $\eta \sim 10^{-1}$ ,  $c \sim 3 \cdot 10^8$  м/с,  $P = 40$  Вт, получаем

$$F \sim 10^{-8} \text{ Н.}$$

5. Лучи, входящие под углом к оси волокна и падающие на левую и правую половины сечения волокна, поворачиваются при многократных отражениях от цилиндрических стенок волокна в противоположные стороны. Чем ближе к стенке волокна входит луч, тем больше отражений он испытывает. Угол луча относи-

тельно оси волокна сохраняется при всех отражениях, поэтому конус света на выходе имеет тот же угол.

**Ковский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе**

**Математика**

**Вариант 1**

1. 18.

2.  $(-\infty; \frac{4}{3}] \cup (2; +\infty)$ .

3.  $2\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

4.  $\frac{3-\sqrt{5}}{6\sqrt{8}\sqrt{3}}$ . Указание. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — площади боковой поверхности и основания пирамиды соответственно,  $\alpha$  — угол наклона боковых граней к плоскости основания. Тогда  $S_2 = S_1 \cos \alpha$ . Кроме того, по условию  $S_1 = \cos \alpha$ ,  $S_2 = \sin \alpha$ . Поэтому  $\sin \alpha = \cos^2 \alpha$  и  $S_2 = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $S_1 = \cos \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ . Теперь без труда находим сторону основания и высоту пирамиды.

5.  $\frac{a}{\cos \alpha}$ . Указание. Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на окружности с диаметром  $AD$ . Поэтому  $\angle BCD = \angle BAD = \alpha$ , и, значит,  $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$  и  $AC = \frac{a}{\cos \alpha}$ .

6.  $[-\frac{13}{11}; -1] \cup [1; \frac{13}{11}]$ . Указание. Неравенство  $|66f(x) - 90| \leq 24$  равносильно неравенству  $1 \leq f(x) \leq \frac{57}{33}$ . (\*) Поскольку один

из корней уравнения  $3f(x) + x = 4$  равен 1 ( $f(1) = 1$ ), второй корень этого уравнения равен  $-13/11$ , причем  $f(-13/11) = f(13/11) = 57/33$ . Так как функция  $f$  возрастает при  $x \geq 0$ , множество положительных решений неравенства (\*) — отрезок  $[1; 13/11]$ .

**Вариант 2**

1. 47.

2.  $\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$ . Указание. Воспользуйтесь фор-

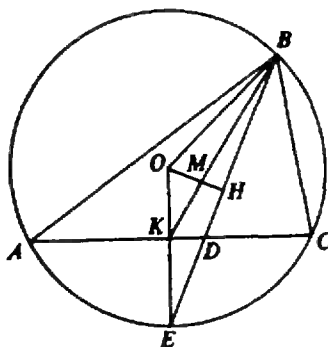


Рис. 8.

мулой  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

3.  $[\frac{1}{16}; 1) \cup [2; +\infty)$ .

4.  $[13; +\infty)$ . Указание. После замены  $y = \sqrt{x-4}$  уравнение приводится к виду  $|y-1| - |y-3| = 2$ .

5.  $60^\circ$ . Указание. Пусть  $O$  — центр описанной около треугольника  $ABC$  (рис. 8) окружности,  $BD$  — биссектриса угла  $B$ ,  $K$  — середина отрезка  $AC$ . По условию  $M$  — точка пересечения медиан. Треугольник  $OBE$  — равнобедренный. Поэтому  $OH$  — биссектриса угла  $BOK$ . По свойству биссектрисы  $OK/OB = KM/MB = 1/2$ . Итак, отрезок  $OK$  равен половине радиуса описанной окружности. Это значит, что  $\angle AOC = 120^\circ$ , а  $\angle B = 60^\circ$ .

6.  $(2 - \sqrt{3})^3$ . Указание. Диагональное сечение  $AA_1C_1C$  куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  проходит через центры  $O$  и  $O_1$  шаров (рис. 9). Пусть ребро куба равно 2, а  $O_1K_1 = r$ . Чтобы найти  $r$ , воспользуйтесь тем, что  $AO = AO_1 + O_1O$ , т. е. равенством  $\sqrt{3} = r\sqrt{3}/2 + r + 1$ .

**Физика**

**Вариант 1**

1. При  $T_0 \geq 3mg$   $h = \frac{l}{4} (\frac{T_0}{mg} - 3)$ , при  $T_0 < 3mg$  высота  $h$  может быть любой.

2.  $A = mgl(\mu_1 + \mu_2)/2$ .

3.  $v_1 = \sqrt{\frac{3\rho_0 V_0}{m_1(1 + m_1/m_2)}}$ ,  $v_2 = \sqrt{\frac{3\rho_0 V_0}{m_2(1 + m_2/m_1)}}$ .

4.  $F_{эл}/F_{грав} = e^2 / (4\pi\epsilon_0 GmM) \approx 2,2 \cdot 10^{39}$ .

5.  $F = B^2 l^2 v / R$ .

6.  $p = Nh / (S\lambda) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}^2$  (здесь  $h$  — постоянная Планка).

**Вариант 2**

1.  $F_{тр1} = F_{тр2} =$

$$= \frac{mgl \sin \alpha \cos \alpha}{2(1 + \sin \alpha)(H/\cos \alpha - R/\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2))} = 0,735 \text{ Н.}$$

2.  $S = m / (\rho_1 h_1 - \rho_2 h) = 5 \text{ м}^2$ .

3.  $U_2 = \sqrt[3]{2} p_1 V_1 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ .

4.  $q = \pm l \sqrt{2\pi\epsilon_0 k(l - l_0) / 5}$ .

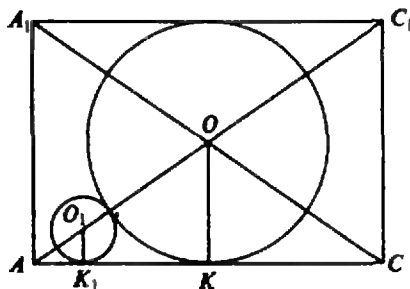


Рис. 9.

5.  $q/m = 8\pi^2 \cos^2 \alpha \Delta \cdot \varphi / (B^2 h^2)$ .

6.  $d = Ff / (F - f) = 0,1 \text{ м}$ .

Московский инженерно-физический институт  
Математика

Вариант 1

1.  $\pi(4k+3)/2, \arctg 3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

2. 254.

3.  $2 < a \leq 5$ . Указание. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (7-a)x^2 - 4x + 7 - a \geq 0, \\ ax^2 + 4x + a > 0. \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют значения  $a$ , для которых

$$\begin{cases} 4 - (7-a)^2 \leq 0, \\ 4 - a^2 < 0. \end{cases}$$

4. Указание. Центр  $O$  описанной сферы лежит на высоте пирамиды и может находиться либо внутри, либо вне ее. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной  $AS$  и  $BC$ , является прямоугольником (докажите это!). Плоскость  $ASH$  пересекается с пирамидой по треугольнику  $ASK$  (рис. 10), а с секущей плоскостью по прямой  $DE$ . По условию  $OH/OS = q$ , т. е. в первом случае (рис. 10, а)  $(h-R)/R = q$ , т. е.  $R = h/(1+q)$ , во втором случае (рис. 10, б)  $R = h/(1-q)$ , а прямая  $DE$  пересекается с треугольником  $ASK$  по отрезку лишь при  $0 < q < 1/3$ . Пусть  $AS = l$ . Из подобия треугольников  $SMO$

и  $ASH$  получаем  $R = \frac{l^2}{2h}$ , откуда находим  $l$ , а затем и сторону основания пирамиды. Длину отрезка  $DE$ , равную стороне прямоугольника сечения, получим из подобия треугольников  $DEK$  и  $ASK$ , а вторую сторону прямоугольника найдем, зная, что она относится к стороне основания как  $SE/SK$ . После вычислений получаем ответ:

$$1. S = \frac{2\sqrt{6}}{9} h^2 \frac{(1+3q)\sqrt{1-q}}{(1+q)^3},$$

если точка  $O$  лежит внутри пирамиды, при этом  $0 < q < 1$ ;

$$2. S = \frac{2\sqrt{6}}{9} h^2 \frac{(1-3q)\sqrt{1-q}}{(1+q)^3},$$

если точка  $O$  лежит вне пирамиды, т. е. при  $0 < q < \frac{1}{3}$ ;

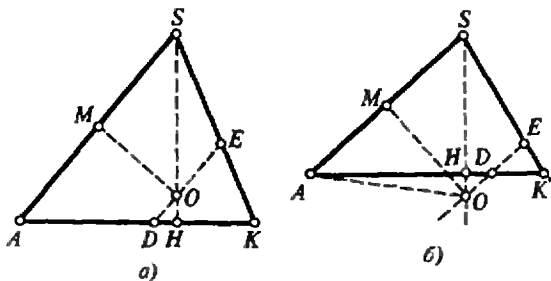


Рис. 10.

3.  $S = \frac{2\sqrt{6}}{9} h^2$

при  $q=0$ , т. е. если точка  $O$  совпадает с точкой  $H$ .

Примечание. При  $0 < q < \frac{1}{3}$  возможны 2 ситуации — точка  $O$  может находиться как вне, так и внутри пирамиды  $SABC$ .

Вариант 2

1.  $\frac{\pi}{8}(2k+1), \frac{1}{10} \arctg \frac{4}{3} + \frac{\pi k}{5}, -\frac{1}{6} \arctg \frac{4}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ . 2. 10 ч. 3.  $\log_2 \frac{a^2-1}{2a-6}$  при

$a \in (-1, 3 - 2\sqrt{2}) \cup \{3, 3 + 2\sqrt{2}\}$ , при остальных значениях  $a$  решений нет.

4. Указание. Поскольку боковые грани пирамиды  $SABC$  — равнобедренные треугольники, имеющие равные площади, возможны 3 случая: а) все плоские углы при вершине  $S$  равны  $2\alpha$ ; б) два из них равны  $2\alpha$ , а третий равен  $\pi - 2\alpha$ ; в) два из плоских углов равны по  $\pi - 2\alpha$ , третий  $2\alpha$ . Вычисляя объем пирамиды в каждом из трех случаев, получаем

Ответ:

а)  $V_1 = \frac{1}{3} l^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3-4 \sin^2 \alpha} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$ ,

б)  $V_2 = \frac{1}{2} l^3 \cos^2 \alpha \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1} \left(\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ,

в)  $V_3 = \frac{1}{3} l^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3-4 \sin^2 \alpha} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$

(объемы для первого и третьего случаев оказались равными, но пирамиды при этом различны!).

Физика

Билет 1

1. В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q = \Delta U + A.$$

Так как давление газа оставалось постоянным,

$$A = p\Delta V.$$

Отсюда получаем

$$\Delta V = (Q - \Delta U) / p = 10^{-3} \text{ м}^3 = 1 \text{ л}.$$

2. Фототок прекращается, когда даже самые быстрые из вылетевших электронов полностью затормаживаются задерживающим напряжением  $U$ :

$$eU = E_{k \max}.$$

Формулу Эйнштейна для фотоэффекта можно записать в виде

$$hc/\lambda = A + E_{k \max}.$$

Таким образом,

$$A = hc/\lambda - eU.$$

3. По перемычке ток не идет, в кольце ток течет по часовой стрелке.

4. На тело действуют (рис. 11): внешняя сила  $F$ , сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции  $N$  и сила трения  $F_{\text{тр}}$ . Работа внешней

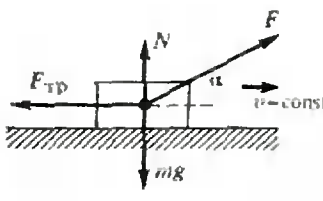


Рис. 11.

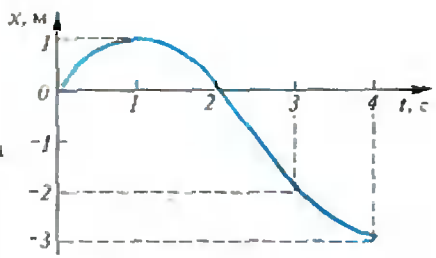


Рис. 12.

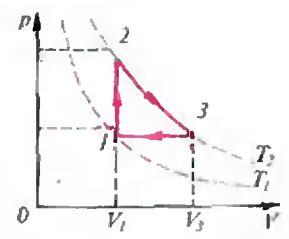


Рис. 13.

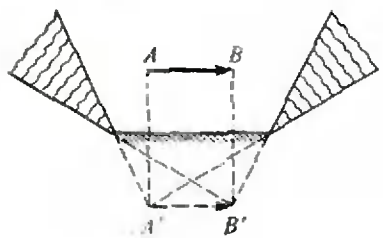


Рис. 14.

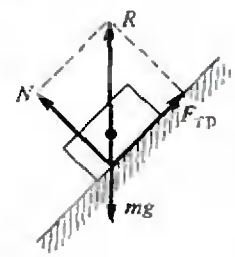


Рис. 15.

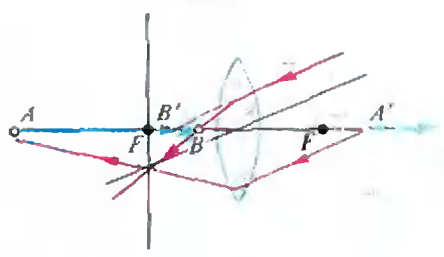


Рис. 16.

силы за время  $t$  равна  
 $A = F \cos \alpha \cdot vt.$

Изменение внутренней энергии тела за то же время равно

$$\Delta U = ct\Delta t.$$

По условию задачи

$$F \cos \alpha \cdot vt = ct\Delta t.$$

Так как тело движется с постоянной скоростью, сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0,$$

или, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$F \cos \alpha - F_{тр} = 0, \\ mg - F \sin \alpha - N = 0.$$

Сила трения скольжения, как известно, равна

$$F_{тр} = \mu N.$$

Окончательно получаем

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g\mu t}{c\Delta t} - \frac{1}{\mu}\right).$$

**Билет 2**

1. См. рис. 12.
2. См. рис. 13.
3. См. рис. 14.

4. Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника, в процессе раздвигания обкладок заряд на них не меняется, а совершенная работа равна разности конечной и начальной энергий конденсатора:

$$A = E_k - E_n = \frac{q^2}{2C_k} - \frac{q^2}{2C_n},$$

где

$$q = C_0 \mathcal{E}, C_n = C_0, C_k = \frac{C_n}{n} = \frac{C_0}{n}.$$

Таким образом,

$$A = (n-1)\mathcal{E}^2 C_0 / 2 = 10^{-8} \text{ Дж.}$$

**Билет 3**

1. На тело действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{R}$ , равная по величине и направленная противоположно силе тяжести (рис. 15). (Часто силу реакции  $\vec{R}$  раскладывают на две составляющие, равные нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  и силе трения  $\vec{F}_{тр}$ .)

2.  $p = nkT/V \approx 1,1 \cdot 10^3 \text{ кПа}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана.

3. См. рис. 16.

4. Обозначим точку контакта высокоомных проводников через  $O$ . Потенциалы точек  $O$  и  $A$  равны, потенциал точки  $B$  равен нулю. Часть схемы, по которой текут токи, может быть представлена в виде, изображенном на рисунке 17. Выберем направления токов, как указано на рисунке, и для участка  $OB$  запишем три уравнения:

$$\varphi_0 - \varphi_B = I_1 R + \mathcal{E}_1, \\ \varphi_0 - \varphi_B = I_0 R, \\ \varphi_0 - \varphi_B = I_2 R - \mathcal{E}_2.$$

Отсюда, учитывая, что сумма токов, вытекающих из точки  $O$ , равна нулю:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

получаем

$$\varphi_A = \varphi_O = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) / 3 = 1 \text{ В.}$$

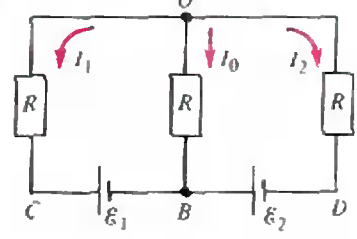


Рис. 17.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

### Математика

#### Вариант 1

1.  $[-2; -1]$ . 2.  $-5$ ; 3.  $\pi(4k+1)/16$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4.  $[-1/2; 0]$ .
5.  $AB=15$ ,  $AC=8$ ,  $BC=13$ .
6.  $0 < a < 2$ . Указание. При  $a=0$  уравнение имеет вид  $2y^2 + 4y + 2 = 0$ , так что любая пара  $(x, -1)$  ему удовлетворяет. При  $a \neq 0$  рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно  $x$ . Для него  $D/4 = a(a-2)(y+1)^2$ , и при  $a(a-2) < 0$  уравнение имеет единственное решение  $y = -1$ ,  $x = 3$ . Если  $a < 0$  и  $a \geq 2$ , уравнение относительно  $x$  имеет решение при любом  $y$ .

#### Вариант 2

1.  $-1/8$ ;  $1/8$ . 2.  $(-\infty; -1] \cup (1; 2)$ .
3.  $n\pi/5$ ; где  $n \neq 5k$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .
4.  $[1/3; 1) \cup (6; 18]$ .
5. 6; 7.
6.  $(4/5; 1/5)$ . Указание. Построим прямую  $l_1$ , симметричную прямой  $l_1$  относительно  $l_2$ , затем прямую  $l_3$ , симметричную прямой  $l_2$  относительно  $l_1$ . После этого построим точку  $B_2'$ , симметричную  $B_2$  относительно  $l_3$ ,  $B_2''$ , симметричную  $B_2'$  относительно  $l_1$  и, наконец,  $B_2'''$ , симметричную  $B_2''$  относительно  $l_2$ . В результате траектория шарика превратится в отрезок  $B_1B_2'''$ . Точка  $B_2'''$  имеет координаты  $(4/3; 1/6)$ . Прямая  $B_1B_2'''$  пересекает прямую  $l_2$  в точке  $(6/5; 1/5)$ . Отсюда следует, что второе отражение от прямой  $l_2$  произойдет в точке  $(4/5; 1/5)$ .

### Физика

1.  $a = Mg \sin \alpha / m$ ,  $\mu = M \operatorname{tg} \alpha / m$ .
2.  $x = l(M_1 - M_2) / (M + M_1 + M_2)$ .
3.  $l = \sqrt{2h(v_0^2 - 2gh)} / g = 20$  м.
4.  $p_a = m(a(1-k)/k - g) / S = 10^5$  Па, где  $k = 0,2$ .
5.  $\varphi = (\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2) / (V_1 + V_2) = 27\%$ .
6.  $r = e^2(m+M) / (\pi \epsilon_0 m M v^2) = 1,7$  нм.
7.  $P = r(2pVeN_A / (RT)) = 96,4$  Вт.
8.  $d = 2/B \sqrt{2U(\sqrt{m_2/e} - \sqrt{m_1/e})} = 0,29$  м.
9.  $U = B_2 l v = 0,2$  В;
10.  $\varphi_{\max} = l v \sqrt{B_2^2 + B_1^2} = 0,215$  В; под углом  $\alpha = \operatorname{arctg}(B_1/B_2) \approx 22^\circ$  к горизонту.
10.  $F = la/(b-a) = 2,5$  см.

Московский институт стали и сплавов

### Математика

#### Вариант 1

1.  $3/2$ . 2. 8. 3. 8. 4.  $(1; 3)$ . 5. 20. 6.  $-4$ .
  7. 1. 8. 5. 9. 6. 10. 5. 11. 24. 12.  $-15$ .
- Указание. Пусть  $f(x) = x^2 + 2ax + a^2 + 4a$ . Функция  $f$  на интервале  $(1; 3)$  отрицательна тогда и только тогда, когда
- $$\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(3) \leq 0, \end{cases}$$
- т. е. при  $a \in [-3 - 2\sqrt{2}; -1]$ .

#### Вариант 2

1.  $-2$ . 2.  $-9$ . 3.  $-0,75$ . 4.  $-3$ . 5.  $-8$ . 6. 99.
7.  $-9$ . 8. 6. 9. 375. 10. 315. 11. 0,75. 12. 2,25.

### Физика

#### Вариант 1

1.  $A = \mu mgl \cos \alpha / (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 22,5$  кДж.
2.  $v = \sqrt{\rho_0 g / (\rho h)} / (2\pi) = 1,8$  Гц (здесь  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воды).
3.  $l = h(1/\mu - \operatorname{ctg} \alpha) = 57$  м.
4.  $H_{\min} = l \operatorname{tg} \alpha - gl^2 / (2v^2 \cos^2 \alpha) = 0,32$  м.
5.  $\Delta m = MV/R(p_{H_2}/T_1 - p_{O_2}/T_2) = 2,5$  г (здесь  $M = 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воды).
6.  $\rho = \frac{p}{RT} \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2} = 0,49$  кг/м<sup>3</sup> (здесь  $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса водорода,  $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса кислорода).
7.  $r = 0,25R = 0,75$  Ом.
8.  $\Delta q = \sqrt{q^2 - 16\pi \epsilon_0 F r^2} = 46$  мкКл.
9.  $U_{\text{общ}} = 420$  В.
10.  $\delta = 90^\circ$ .

#### Вариант 2

1.  $F_d = (m_1 + m_2)g + m_1 \omega^2 x_{\text{ст}} = 51,1$  Н.
2.  $E_k = m(v_0^2 + g^2 t^2) / 2 = 32$  Дж.
3.  $t = \sqrt{h(m_1 + m_2) / (g(m_2 - m_1))} = 0,55$  с.
4.  $T = 2\pi \sqrt{R/g} = 85$  мин (здесь  $R = 6400$  км — радиус Земли).
5.  $N = \rho ghV / (kT) = 320$  (здесь  $\rho = 13,6 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — плотность ртути,  $h = 10^{-11}$  мм,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/к — постоянная Больцмана).
6.  $Q = c_p \nu MT = 8$  кДж (здесь  $M = 32 \times 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса кислорода,  $\nu = 1$  моль).
7.  $k = 1 + C_3 / (C_1 + C_2) = 2$ .
8.  $n = 40$ .
9.  $|\mathcal{E}| = Blv \sin \alpha = 0,2$  В.
10.  $\varphi = 60^\circ$ .

### Квант для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. Третий жених получит 6 слив, второй — на одну больше половины первого остатка, который равен 14 сливам, что, в свою очередь, на одну сливу меньше половины первоначального количества слив. Отсюда следует, что слив в корзине было 30.
2. Докажем это утверждение, исходя из того, что сумма  $k$  первых нечетных чисел равняется  $k^2$ . Рассмотрим разность между суммой первых  $(k+n)$  нечетных чисел и суммой первых  $k$  нечетных чисел. Таким образом, мы получим сумму  $n$  последовательных нечетных чисел  $(k+n)^2 - k^2 = n(2k+n)$ . Очевидно, что это число делится на  $n$  при любых  $k$ .

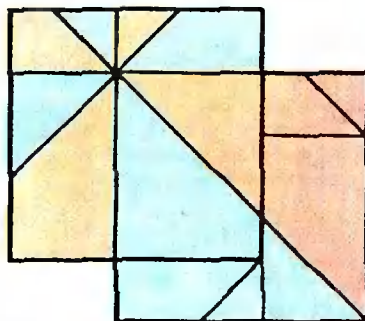


Рис. 18.



3. Пусть первоначальное число имеет вид  $\overline{kk}$ . Тогда это число равно  $11k$ , а его квадрат —  $121k^2$ . Пусть квадрат числа  $\overline{kk}$  имеет вид  $\overline{aabb}$ . Запишем его следующим образом:  $1100a+11b$ . Так,  $121k^2=1100a+11b$ . Сократив на 11, получим  $11k^2=100a+b$  или  $11k^2=99a+a+b$ . Отсюда  $a+b=11$ , а  $k^2=9a+1$ . Выражение справа является квадратом только для  $a=7$  ( $1 \leq a \leq 9$ ), отсюда  $b=4$  и  $k=8$ .
4. Двух елок недостаточно, так как в этом случае  $L=1$  и невозможно подобрать значения для  $E$ . А для трех елок имеется два решения:  $5162+5162+5162=15486$  и  $5124+5124+5124=15372$ .
5. На рисунке 18 показано, как из частей квадрата сложить такой же квадрат, диагональ которого делит его на две равные части: красную и синюю.

Курс «Математика 6—8»

«Квант» № 12 за 1990 г.)

10. Для того чтобы отвесить 2 килограмма крупы от имеющихся 9 килограммов с помощью двух гирь за три взвешивания, надо сначала разделить крупу ровно пополам, одну из половин снова разделить пополам и от полученного отвесить с помощью двух гирь 0,25 кг, в результате чего останется ровно 2 кг. С помощью одной гири также можно отвесить 2 килограмма крупы за три взвешивания. Для этого положим гирю на одну из чашек весов, рассыпем крупу по чашкам так, чтобы весы оказались в равновесии. В результате получим на одной чашке 4,4 кг, на другой — 4,6 кг. Вторым взвешиванием разделим пополам 4,4 кг крупы и с помощью гири третьим взвешиванием отвесим от полученного 0,2 кг.

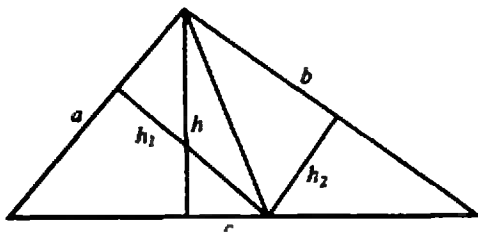


Рис. 19.

11. Из соотношения площадей треугольников (рис. 19) получим, что  $ch=ah_1+bh_2$ . По условию  $c \geq a$ ,  $c \geq b$ , поэтому  $ch \leq c(h_1+h_2)$ , отсюда  $h \leq h_1+h_2$ .
12. Нетрудно заметить, что разность чисел 987 654 321 и 123 456 789 — число 864 197 532, в котором цифры от 1 до 9 встречаются ровно по одному разу. Поэтому эти три числа удовлетворяют условию задачи.

Дорогой читатель!

Редакция получила много писем с пометкой «Анкета — 90». Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении. В ближайших номерах мы планируем дать обзор читательских писем и начать публикацию ответов на ваши вопросы. Конечно, на все вопросы ответить на страницах журнала

Анкета 3—91

1. Класс, в котором Вы учитесь: \_\_\_\_\_  
 Ваша профессия (если Вы работаете): \_\_\_\_\_  
 круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните). \_\_\_\_\_

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? \_\_\_\_\_

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? \_\_\_\_\_

мы не сможем, поэтому будем отбирать наиболее часто встречающиеся.

В этом году мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 3—91».



**Главный редактор —**  
академик Ю. Осипкин

**Первый заместитель главного редактора —**  
академик С. Новиков

**Заместителя главного редактора:**  
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

**Редакционная коллегия:**  
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,  
А. Виленкин, С. Воронин, В. Гнеденко,  
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,  
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,  
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,  
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,  
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

**Редакционный совет:**  
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмиков,  
В. Берник, В. Болтынский, Н. Васильев,  
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,  
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,  
Л. Кудрявцев, А. Логунов, **А. Мигдал**  
В. Можаяев, И. Новиков, В. Разуковский,  
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,  
Я. Смородинский, И. Сурия, Е. Сурков,  
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,  
И. Шарыгин, Г. Яковлев

**Номер подготовили:**  
А. Виленкин, Л. Винокова, М. Демисова, А. Егоров,  
Л. Кардашевич, В. Овсянко, Т. Петрова, В. Тихомирова

**Номер оформили:**  
Д. Крымов, Н. Кузмина, С. Лукhin,  
Э. Назаров, П. Черняуский, В. Юдин

**Редактор отдела художественного оформления**  
С. Иванов

**Художественный редактор** Т. Макарова  
**Заведующая редакцией** Л. Чернова  
**Корректор** Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант».  
тел. 260-33-54

Сдано в набор 23.01.91. Подписано к печати 19.02.91.  
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.  
Гарнитура школьная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 6,46. Усл. кр.-отт. 27,09 Уч.-изд. л. 7,96.  
Тираж 94 771 экз. Заказ 2606. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственного комитета СССР  
по печати  
142300, г. Чехов Московской области

## Анкета 3—91

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 1—3 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши вопросы и пожелания:

# Шахматная страничка

## НОВОСТИ МИКРОМИРА

В Лондоне состоялась первая Олимпиада компьютерных игр. Участвовали 85 программ из 16 стран, в том числе из СССР. Состязания проводились по 15 играм: шахматам, бриджу, го, шашкам, рэндзю, реверси и др. Главный организатор Олимпиады — хорошо знакомый любителям компьютерных шахмат Д. Левин.

В шахматном турнире участвовали трехкратный чемпион мира «Фиделити» (США, авторы программы Д. и К. Шпраклен) и пятикратный «Мефисто» (ФРГ, программа принадлежит англичанину Р. Лэнгу), но сюрпризом турнира стала победа программы Э. Шредера «Ребел» (ФРГ) — 7,5 очка из восьми. Этот шахматный микрокомпьютер до сих пор держался в тени. «Мефисто» завоевал «серебро» (6,5 очков), «бронза» досталась «Фиделити».

Ричард Лэнг получил некоторую компенсацию... в турнире по рэндзю. Его старая программа, написанная еще в 1982 году, поделила первое место.

Вскоре после Олимпиады в югославском городе Порторож состоялась девятое первенство мира среди микрокомпьютеров. «Мефисто» набрал те же 6,5 очков, но в семи партиях, и в шестой раз подряд завоевал шахматную микрочемпиону. «Ребел» отстал на очко.

Затем «Мефисто» «отправился» на международные состязания в Вениу. В главном турнире, проходившем по швейцарской системе, он разделил 51-е место с несколькими международными мастерами. Удачнее сложились его дела в турнире по быстрым шахматам (30 минут на партию). Впереди оказались венский мастер Р. Лендавай и «Мефисто» — 4,5 очков из 5, причем «Мефисто» в хорошем позиционном стиле обыграл победителя главного турнира международного мастера с солидным рейтингом 2555 Л. Олля.

### «Мефисто» — Л. Олля Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kc3 Kc6 3. g3 g6 4. Cg2 Cg7 5. d3 e6 6. Ce3 d6 7. Kf3 Kge7 8. 0—0 Kd4 9. Фd2 Kec6 10. Cg5 Фa5 11. K:d4 cd 12. Ke2 Ф:d2 13. C:d2 Cd7 14. Jlad1 Kpe7 15. Cg5+ f6 16. Cd2 f5. После размена ферзей позиция уравнилась, но понятно желание мастера проявить активность против своего электронного соперника. В результате у черных образуются слабости, которые в конце концов подведут их.

17. ef gf 18. Kf4 Jhc8 19. Kh5 Ch8 20. Jcl1 d5 21. Jf1 Kpd6 22. Kf4 a5 23. c4 dc3 24. bc Lab8 25. Kb3 d4 26. c4 Kpe7 27. Cf4 Jla8 28. a3 Kpf6 29. Kg5 Je8 30. K:h7+ Kpg6 31. Kg5 e5 32. Cd2 Cf6 33. h4 Ce7 34. Jb1 Lab8 35. C:c6 bc 36. Kf3 Cd6 37. J:b8 C:b8 38. C:a5. Черные уже без двух пешек.

38...c5 39. Jb1 e4 40. J:b8! J:b8 41. Ke5+ Kph5 42. K:d7 Jla8 43. Ce1 J:a3 44. K:c5 ed 45. Kpf1 f4 46. Cd2 f3 47. Ke4 Jla1+ 48. Ce1 Jcl1 49. Kd2 Kpg4. Олля проявил максимум изобретательности, и сейчас белые оказались бы в полном пугцванге, если бы... не их пешка «h». 50. h5! Kp:b5 51. K:f3 J:e4 52. g4+! Компьютер никогда не упускает возможности провести маленькую тактическую операцию. 52...Kph6 53. Cd2+ Kpg7 54. Ke5. Черные сдались.

А вот еще одна интересная победа «Мефисто». Международный мастер И. Иванов два года назад первым из сильных шахматистов попал под пресс «Дип сот». Теперь же его одолел и микрочемпион.

### «Мефисто» — И. Иванов Английское начало

1. d4 g6 2. c4 Cg7 3. Kc3 c5 4. Kf3 cd 5. K:d4 Kc6 6. e3 Kf6 7. Kc2 b6 8. Ce2 Cb7 9. 0—0 Jc8 10. Cf3 Ca6 11. b3 Ke5 12. Ch2 K:f3+ 13. Ф:f3 Jc5 14. Kd5 J:d5 15. cd C:f1 16. J:f1 0—0 17. d6! Не свойственная старым программам позиционная жертва пешки. Впрочем, в случае ее приня-

тия — 17...ed — черные быстрое лишатся пешки d6, а вслед за ней, возможно, и d7.

17...e6 18. e4 Ke8 19. C:g7 Kp:g7 20. Фc3+ Фf6 21. e5! Фf4 22. g3 Фe4 23. Ke3 f6 24. Фc8 K:d6 25. ef+ J:f6 26. Ф:d7+ Kf7 27. Ф:a7 h5. Ценой пешки мастер оживил свои фигуры и, видимо, рассчитывал расправиться с машиной на королевском фланге. 28. Jd1 h4 29. Ф:b6. «Мефисто» ничего не боится и смело забирает вторую пешку. 29...Kg5 30. Kpf1 hg 31. hg Фf3 32. Jld7+ Kph6 33. Kd1 Ke4 34. Kpg1! Kg5 35. Фd4 Kh3+ 36. Kpf1 g5 37. Фd3 Фh1+ 38. Kpe2 Jf5 39. Фc3 Kg1+ 40. Kpd2 Je5 41. Ke3 Фe4 42. Фc8. Черные сдались.

«Мефисто» одолел и Юдит, самую юную из трех знаменитых сестер Полгар, правда, в сеансе одновременной игры.

### Ю. Полгар — «Мефисто» Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ed cd 4. c4 Kf6 5. Kc3 e6 6. Kf3 Cb4 7. ed K:d5 8. Cd2 Kc6 9. Cd3 0—0 10. 0—0 Kf6 11. Cg5 h6. Кажется, это — теоретическая новинка. В партии Джурнич — Тарьян (Вршац, 1983) после 11...Ce7 12. Jc1 b6?! 13. C:f6 C:f6 14. Ke4 Cb7 15. K:f6+ Ф:f6 16. Ce4 Jla8 17. Jc3 белые получили явный перевес.

12. Ch4 g5 13. Cg3 a6 14. a3 Ce7 15. Фd2 b5 16. h4 Kh5 17. Ch2 Cb7 18. hg hg 19. Ce4 Ka5 20. C:b7 K:b7 21. Jlae1 Kg7 22. Ke4 f6 23. b4 Фd5 24. Kc3 Фb3!? 25. Jc3 Kf5 26. Jd3 g4 27. Ke1. (Правильно 27. Ke2!?) 27...Jla8 28. K:b5 Фc4 29. Kc3 Kpf7 30. d5? Рывок в центре ведет к печальным последствиям. 30...e5 31. d6 Kb:d6 32. Kd5 Фc1 33. Фe2 Jc4 34. K:e7?! Kp:e7 35. C:e5 fe 36. Ф:e5+ Kpd7 37. b5 Jc5 38. J:d6+ K:d6 39. Фg7+ Jf7 40. Ф:g4+ Kpe7 41. Kd3 Фg5 42. Фd4 Jd5 43. Фa7+ Kpd8 44. Фb8+ Kpd7 45. ba Ф:g2+ . Белые сдались.

Е. Гук

70 коп.

Индекс 70465

*Потренируйте ваше пространственное воображение: найдите объединение трех половинок куба, показанных в левых частях трех нижних равенств, и нарисуйте его в правых частях, как это сделано в примере сверху.*

В. Канев

